

ESPAÑOL
PÁGINAS (2-68)

ENGLISH
PAGES (70-134)

**ANTIMATERIA
BIOLÓGICA,
CONSTANTE
COSMOLÓGICA, Y
MECÁNICA
CUÁNTICA
RELATIVISTA**

Estructura del libro

Introducción (5-11)

Capítulo 1. El modelo más simple de una partícula cuántica confinada espacialmente (12-20)

Sección 1.a. La ecuación de Schrödinger (13-16)

Sección 1.b. Pozo unidimensional infinito (16-19)

Sección 1.c. Radio de Bohr (19-20)

Capítulo 2. El modelo más simple de una partícula cuántica relativista confinada espacialmente (21-43)

Sección 2.a. Teoría de la relatividad especial (22-25)

Sección 2.b. Introducción de la relatividad especial en la mecánica cuántica (25-31)

Sección 2.c. Ecuaciones de Dirac de Peralta (31-37)

Sección 2.d. Una partícula cuántica relativista en el pozo infinito unidimensional (37-43)

Capítulo 3. Una partícula cuántica relativista podría interactuar consigo misma (44-58)

Sección 3.a. Número de elementos de la tabla periódica (44-49)

Sección 3.b. Gravedad (49-55)

Sección 3.c. La carga de Planck (55-58)

Capítulo 4. Rompiendo la simetría partícula-antipartícula (59-65)

Sección 4.a. Escasez de elementos de antimateria (60-64)

Sección 4.b. La antimateria biológica no puede existir (64)

Sección 4.c. Agujeros negros primordiales y sumideros eléctricos de antimateria (64-65)

Capítulo 5. Energía oscura y constante cosmológica (66-68)

Referencias (135-136)

Sobre el autor (137)

Enlaces adicionales (139)

Introducción

Hoy en día, la ciencia se encuentra en una encrucijada. El siguiente fragmento es una buena descripción del estado actual de la ciencia [1]:

“El actual Modelo Estándar de Cosmología (SMC), también llamado "Modelo Cosmológico de Concordancia" o "Modelo Λ CDM", asume que el universo fue creado en el "Big Bang" a partir de energía pura, y ahora está compuesto por aproximadamente un 5% de materia ordinaria, un 27% de materia oscura y un 68% de energía oscura.

Mientras que el SMC se basa principalmente en dos modelos teóricos: (1) el Modelo Estándar de Física de Partículas (SMPP), que describe la física de lo muy pequeño en términos de mecánica cuántica, y la Teoría General de la Relatividad (GTR), que describe la física de lo muy grande en términos de mecánica clásica; también depende de varios supuestos adicionales.

Los principales supuestos adicionales del SMC son: (1) el universo fue creado en el Big Bang a partir de energía pura; (2) el contenido de energía en masa del universo está dado por un 5% de materia ordinaria, un 27% de materia oscura y un 68% de energía oscura; (3) las interacciones gravitacionales entre las masas asociadas a los tres componentes anteriores se describen mediante el GTR; y (4) el universo es homogéneo e isótropo a escalas (cósmicas) suficientemente grandes.

Desafortunadamente, tanto el SMPP como el GTR se consideran incompletos en el sentido de que no proporcionan

ninguna comprensión de varias observaciones empíricas. El SMPP no proporciona ninguna comprensión de la existencia de tres familias o generaciones de leptones y quarks, la jerarquía de masas de estas partículas elementales, la naturaleza de la gravedad, la naturaleza de la materia oscura, etc. El GTR no proporciona ninguna comprensión de la cosmología del Big Bang, la inflación, la asimetría materia-antimateria en el universo, la naturaleza de la energía oscura, etc.

Además, la última versión del SMC, el modelo Λ CDM, es esencialmente una parametrización del modelo cosmológico del Big Bang en el que el GTR contiene una constante cosmológica, Λ , que está asociada con la energía oscura, y el universo contiene partículas de materia oscura suficientemente masivas, es decir, "materia oscura fría". Sin embargo, tanto la energía oscura como la materia oscura son simplemente nombres que describen entidades desconocidas.”

Actualmente, no hay consenso sobre cómo construir una teoría unificada de la mecánica cuántica y la teoría general de la relatividad. Sin embargo, es bien aceptada la teoría de la mecánica cuántica relativista, que es una teoría que unifica la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad especial [2]. La mecánica cuántica relativista, que también se denomina electrodinámica cuántica, proporcionó la plantilla para todas las teorías que forman el modelo estándar de la física de partículas [3]. Desafortunadamente, hay dos predicciones principales de la mecánica cuántica relativista que son evidentemente erróneas cuando se comparan con el conocimiento observacional actual sobre el mundo en el que

vivimos. Estas predicciones se refieren, en primer lugar, a la escasez de antimateria observada en el universo y, en segundo lugar, al enorme error en la predicción de la mecánica cuántica de la llamada constante cosmológica y la abundancia de energía oscura en el universo [1, 4]. En esta monografía, el autor avanza una posible explicación de estos misterios.

Estamos rodeados de seres vivos hechos de materia. Sin embargo, no se conocen seres vivos hechos de antimateria. A primera vista, este hecho cotidiano parece tan trivial que no justifica ninguna curiosidad científica al respecto. Desafortunadamente, hay una razón profunda para esta aparente falta de curiosidad científica.

El modelo estándar de la física de partículas es considerado actualmente por la mayoría de los físicos como nuestra mejor teoría sobre los fundamentos físicos de nuestro mundo [3]. En esta teoría, una antipartícula hecha de antimateria corresponde a cada partícula hecha de materia. Las excepciones son algunas partículas que son sus propias antipartículas. Las partículas y antipartículas se crean a partir del vacío cuántico en pares [2]. Además, el modelo estándar de la física de partículas predice que, salvo algunas excepciones, debería haber una simetría materia-antimateria en la Naturaleza [1-2, 5]. En consecuencia, un mundo en el que la antimateria debería ser tan abundante como la materia es el panorama general del mundo predicho por el modelo estándar de la física de partículas. Esto contradice nuestras experiencias cotidianas. Estamos rodeados de materia, pero la antimateria es escasa en el universo conocido.

Además, estamos rodeados de seres vivos hechos de materia. Sin embargo, nunca se han observado seres vivos hechos de antimateria. Esto parece una predicción totalmente equivocada de nuestra mejor teoría sobre los fundamentos físicos de nuestro mundo. Desafortunadamente, la aparente falta de curiosidad científica sobre la inexistencia de la antimateria biológica puede ser un esfuerzo sutil para ocultar las deficiencias de nuestras mejores teorías físicas.

En esta monografía, el autor avanza una posible explicación de este misterio. Por supuesto, la hipótesis del autor debería ser controvertida porque desafía los puntos de vista actuales en el modelo estándar de la física de partículas. Parece que no hay otra forma de explicar nuestras experiencias cotidianas. La idea básica detrás de la hipótesis del autor es la siguiente: cada partícula cuántica y cada antipartícula interactúan consigo mismas.

¿Por qué esta simple idea es tan controvertida? Claramente, cada objeto macroscópico que nos rodea interactúa consigo mismo. Por ejemplo, la existencia de magma en el interior de nuestro planeta es consecuencia de la enorme atracción gravitacional de algunas partes de la Tierra sobre otras partes de esta. También, es bien conocida la existencia de objetos cuánticos que interactúan entre sí. Por ejemplo, el átomo de hidrógeno existe porque hay una interacción electromagnética entre el electrón y el protón que lo forma. La dificultad aparece cuando consideramos las partículas cuánticas fundamentales. En el modelo estándar de la física de partículas, las partículas cuánticas fundamentales son literalmente puntos con tamaño nulo; por lo tanto, las

partículas fundamentales como los electrones no tienen partes que puedan interactuar entre sí.

En el modelo estándar de la física de partículas, un electrón es un punto matemático; por lo tanto, un electrón no podría interactuar consigo mismo. Esta idea extremadamente matemática sobre el electrón es cuestionada por el autor en esta monografía. El autor admite que esta es actualmente una idea controvertida, pero la curiosidad está en el corazón de la ciencia. En esta monografía se discute cómo, manteniendo la validez de la mecánica cuántica relativista, pero adoptando la idea actualmente controvertida de que un electrón como un positrón podría interactuar eléctricamente consigo mismo, podríamos explicar la experiencia cotidiana de la ausencia de antimateria biológica en nuestro mundo.

Este no es un libro fácil de leer porque se asume la validez de la mecánica cuántica relativista [2-3], lo cual no es un tema fácil. Sin embargo, el autor utiliza una introducción más sencilla a la mecánica cuántica relativista propuesta recientemente [6]. No hay uso de la ecuación de onda de Dirac en este enfoque de la mecánica cuántica relativista. En lugar de la ecuación de Dirac [2], este libro se basa en una ecuación de onda relativista más simple, similar a la de Schrödinger, la llamada ecuación de Grave de Peralta [6]. Para simplificar, la discusión se basa en la solución de la ecuación de Grave de Peralta para el pozo infinito. Este es el modelo más simple para una partícula cuántica relativista con masa localizada espacialmente. Se presenta una discusión semicuantitativa de las consecuencias de sumar la interacción de la partícula cuántica consigo misma.

Finalmente, la simetría materia-antimateria se rompe al postular que una partícula interactúa eléctricamente consigo misma de una manera diferente a como la antipartícula correspondiente interactúa consigo misma. Se muestra una consecuencia notable de esta hipótesis: esta teoría puede explicar nuestra experiencia cotidiana de vivir en un mundo donde solo existen seres biológicos hechos de materia. Esto sugiere fuertemente que la mecánica cuántica relativista actual debería expandirse incluyendo la interacción de cada partícula y antipartícula cuántica consigo misma.

Además, el autor avanza una hipótesis que podría corregir las predicciones extremadamente erróneas de la mecánica cuántica sobre el valor de la constante cosmológica en la teoría de la relatividad general y sobre la abundancia de energía oscura relacionada con ella [4]. El vacío en mecánica cuántica es como un fluido turbulento lleno de partículas virtuales que aparecen y desaparecen aleatoriamente [2-3]. Una consecuencia importante de esto es que el vacío de la mecánica cuántica contiene una gran cantidad de energía [4]. Esta energía del vacío cuántico es una posible candidata a ser la naturaleza de la energía oscura en las teorías cosmológicas modernas [1, 4]. Sin embargo, si la energía del vacío cuántico fuera la naturaleza de la energía oscura, entonces algunas estimaciones de la mecánica cuántica de la densidad de energía oscura están en un error gigantesco del orden de 10^{120} [4]. El valor observacional actual de la densidad de energía oscura es $\approx 10^{-10} \text{ J/m}^3$; sin embargo, una estimación cruda de la mecánica cuántica de la densidad del vacío cuántico es $\approx 10^{111} \text{ J/m}^3$ [4].

El autor de esta monografía propone una corrección sencilla para la estimación de la mecánica cuántica relativista de la densidad de energía del vacío. El vacío de la mecánica cuántica tiene energía; por lo tanto, tiene una masa asociada a él. Si consideramos al vacío cuántico un objeto cuántico con masa, entonces podríamos extrapolar al vacío los resultados obtenidos previamente para cualquier objeto cuántico libre con masa. Es decir, la masa de un vacío cuántico debe ser menor que la masa de Planck. El vacío no es un vacío cuántico, sino un vacío clásico cuando su masa supera la masa de Planck. No hay nada en el vacío clásico. Esto explica el valor observacional extremadamente bajo de la densidad de energía oscura. Suponiendo que la energía del vacío cuántico es la naturaleza de la energía oscura, y utilizando el valor observacional de esta, obtenemos 1000 Km como una estimación cruda del radio máximo del vacío cuántico.

El motor impulsor de la Ciencia ha sido siempre la curiosidad infinita de los seres humanos. El autor invita a los lectores a seguirlo a través de este ejercicio de curiosidad científica.

Capítulo 1. El modelo más simple de una partícula cuántica confinada espacialmente

La descripción de las partículas clásicas se corresponde con nuestras experiencias cotidianas de objetos, pequeños y enormes, que percibimos como localizados espacialmente. Ciertamente podemos hablar del tamaño de una partícula clásica. Además, nuestras experiencias cotidianas nos dicen que estamos rodeados de partículas clásicas. En Mecánica Clásica, la traslación de una partícula clásica se describe a través de la descripción de la traslación de su centro de masa [7]. El centro de masa es un punto matemático de tamaño nulo. Sin embargo, la partícula clásica no tiene un tamaño nulo.

Las partículas cuánticas son diferentes. Hay una onda o campo cuántico asociado con cada partícula cuántica [8]. Sin embargo, como toda partícula, se supone que las partículas cuánticas están localizadas espacialmente de alguna manera. Una partícula cuántica podría encontrarse en cualquier lugar donde exista su función de onda o campo cuántico [8]; Por lo tanto, el carácter de partícula de una partícula cuántica podría estar asociado con la extensión espacial o el tamaño de la función de onda asociada a ella. Por ejemplo, el átomo de hidrógeno es muy pequeño, pero no es un punto matemático sin tamaño. Esto se debe a que el electrón en el átomo de hidrógeno podría estar en cualquier lugar donde exista la función de onda asociada al electrón. La función de onda del electrón se localiza espacialmente alrededor del protón en el átomo de hidrógeno. Esto determina el pequeño tamaño del átomo de hidrógeno. En Mecánica Cuántica, un paquete de onda se suele utilizar como la función de onda

asociada a una partícula libre [8]. La localización espacial del paquete de ondas en una región pequeña corresponde a la localización espacial intuitiva que debe tener toda partícula.

En mecánica cuántica no relativista, la función de onda asociada a una partícula cuántica se encuentra resolviendo la ecuación de Schrödinger [8]. Por esta razón, se requieren algunas habilidades matemáticas para una comprensión completa de la mecánica cuántica. Sin embargo, para llegar a la máxima audiencia posible, utilizaremos en esta monografía la mínima cantidad de matemáticas necesarias para lograr una buena comprensión del primer tema central abordado por esta monografía, que es responder a la pregunta "¿dónde está la antimateria biológica?"

Sección 1.a. La ecuación de Schrödinger

La diferencia básica entre una partícula clásica y una cuántica es que hay una onda asociada con una partícula cuántica [6]. No hay ninguna onda asociada a una partícula clásica. Diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica dan diferentes respuestas a la naturaleza de la onda asociada con una partícula cuántica [6, 8]. Sin embargo, todas las interpretaciones de la mecánica cuántica coinciden en que la función de onda correspondiente a la onda asociada a una partícula cuántica no relativista es una solución de la ecuación de Schrödinger [6, 8]. La ecuación unidimensional de Schrödinger para una partícula cuántica no relativista con masa m viene dada por la siguiente expresión [6, 8]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x)\psi(x, t). \quad (1.1)$$

Las soluciones de esta ecuación de onda son las funciones de onda ψ que dependen de las variables espaciales (x) y temporales (t). Para simplificar, discutimos aquí solo la ecuación unidimensional de Schrödinger. Sin embargo, el espacio es tridimensional; Por lo tanto, una función de onda más realista dependerá de tres variables espaciales [6, 8]. En la Ec. (1.1), $V(x)$ es un potencial que solo depende de la variable espacial, $\hbar = h/2\pi$ es la constante de Planck reducida e $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Obsérvese que m y V son las únicas propiedades de la partícula y del medio donde se encuentra la partícula, respectivamente, que se incluyen explícitamente en la ecuación de Schrödinger. La onda asociada con una partícula cuántica no relativista libre es una solución de la ecuación de Schrödinger más simple posible ($V = 0$):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t). \quad (1.2)$$

Buscando soluciones estacionarias de la forma:

$$\psi(x, t) = \varphi(x)T(t). \quad (1.3)$$

Sustituyendo la Ec. (1.3) en la Ec. (1.2) y dividiendo el resultado por φT , obtenemos:

$$i\hbar \frac{\frac{d}{dt}T}{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\frac{d^2}{dx^2}\varphi}{\varphi}. \quad (1.4)$$

Ambos lados de la Ec. (1.4) deben ser iguales para todos los valores de x y t . En consecuencia, cada lado de la Ec. (1.4) debe ser igual a la misma constante. Llamémoslo por

conveniencia E . Veremos más adelante que E es un nombre excelente porque, como descubriremos más adelante, E es el valor propio de la ecuación propia correspondiente a la energía total de la partícula. De esta manera podemos reducir la tarea de resolver la ecuación de Schrödinger, es decir, una ecuación en derivadas parciales que involucran derivadas de segundo orden, a la tarea más simple de resolver un sistema de las siguientes dos ecuaciones diferenciales:

$$i\hbar \frac{d}{dt} T = ET . \quad (1.5)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi = E\varphi . \quad (1.6)$$

Por razones obvias, la ecuación (1.6) se denomina ecuación de Schrödinger independiente del tiempo [8]. Al resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, podemos encontrar las funciones propias (φ) y los valores propios (E) correspondientes a la energía de la partícula cuántica no relativista libre. Es fácil comprobar por simple sustitución en ella, que la siguiente función es una solución de la Ec. (1.5):

$$T(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} . \quad (1.7)$$

En consecuencia, si φ es una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (Ec. (1.6)), entonces la siguiente es una solución estacionaria de la ecuación de Schrödinger (Ec. (1.2)):

$$\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} . \quad (1.8)$$

La forma más sencilla de obtener una aproximación razonablemente buena a la función de onda (φ) de una

partícula cuántica libre es suponer que, por alguna razón, la función de onda asociada a la partícula está absolutamente confinada en una región espacial muy pequeña [4].

Sección 1.b. Pozo unidimensional infinito

Mientras que la dependencia temporal de las soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger siempre viene dada por la Ec. (1.7), las funciones propias (φ) y los valores propios (E) de la ecuación de Schrödinger (Ec. (1.1)) son diferentes para diferentes potenciales [4, 6]. Posiblemente, el modelo más crudo, pero más simple posible de una partícula cuántica "libre" es entonces una partícula absolutamente confinada en el segmento abierto $0 < x < L$. La función de onda en un modelo de este tipo debe ser nula en el resto de la línea. En particular, $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$ en todo momento. Esto supone que la partícula debería moverse en un potencial repulsivo infinitamente grande en las regiones $x \leq 0$ y $x \geq L$. El más simple de tales potenciales es el llamado pozo unidimensional infinito [4, 6]:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 < x < L \\ +\infty, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.9)$$

Esta elección del potencial implica que la partícula es como una partícula libre dentro del pozo. Este problema se reduce a resolver el siguiente problema matemático:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t), \quad \text{if } 0 < x < L \\ \psi(x, t) \equiv 0, \quad \text{en otro caso} \quad (1.10)$$

Las soluciones estacionarias de la Ec. (1.10) son de la forma dada por la Ec. (1.8), donde φ es una solución de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t) &= -k^2 \varphi, & \text{if } 0 < x < L, \\ \varphi(x) &\equiv 0, & \text{en otro caso} \end{aligned}, \quad \text{con } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (1.11)$$

Si $E \geq 0$, entonces $k \geq 0$; por lo tanto, la solución general de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en la Ec. (1.11) es:

$$\varphi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx). \quad (1.12)$$

Pero:

$$\varphi(0) = B = 0. \quad (1.13)$$

Así:

$$\varphi(L) = A \sin(kL) \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

Por lo tanto, las funciones propias y los valores propios de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en la Ec. (1.11) son:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{y } E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2, \\ \text{con } n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

La constante A se puede encontrar a partir de la condición de normalización [6, 8]:

$$\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = 1 = \int_0^L A^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx = A^2 L \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{L}}. \quad (1.16)$$

En consecuencia, las soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger en un pozo infinito unidimensional son:

$$\psi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}. \quad (1.17)$$

Deberíamos detenernos ahora y discutir el significado físico de los resultados matemáticos que obtuvimos. No debemos perdernos en el formalismo matemático y olvidar por qué nos interesaba resolver la Ec. (1.10). Propusimos la Ec. (1.10) como la ecuación de Schrödinger correspondiente a una aproximación simple pero tosca de una partícula cuántica completamente confinada en una región de espacio pequeño. Esta es una aproximación simple porque es un problema unidimensional y porque se utiliza el potencial infinito del pozo. Es un enfoque burdo por las mismas razones. Sin embargo, como se discutirá más adelante, los resultados obtenidos pueden explicar por qué los átomos de hidrógeno son estables y por qué sus espectros están formados por un conjunto discreto de líneas brillantes u oscuras [6].

Los únicos valores posibles de la energía de los estados estacionarios de una partícula cuántica con masa m que está confinada en una región espacial pequeña están dados por la Ec. (1.15). Por lo tanto, el valor energético mínimo posible es:

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} > 0. \quad (1.18)$$

La existencia de un valor mínimo no nulo de la energía significa que la partícula localizada espacialmente no puede perder más energía si está en su estado fundamental ($n = 1$). Esto explica la estabilidad del átomo de hidrógeno. Además, de la Ec. (1.15) se deduce que una partícula cuántica con masa m que está confinada en una región espacial pequeña debe tener un espectro de frecuencia discreto. Cabe señalar que la Ec. (1.15) no predice correctamente el espectro observado experimentalmente del átomo de hidrógeno. Esto podría esperarse porque el electrón en el átomo de hidrógeno no se mueve en un potencial de pozo infinito (Ec. (1.9)) sino en el potencial de Coulomb producido por el protón. Sin embargo, es sorprendente que tanto la estabilidad de los átomos de hidrógeno como el carácter discreto de sus espectros sean sólo consecuencias de la localización espacial de la partícula cuántica.

También debe tenerse en cuenta que los valores de energía dados por la Ec. (1.15) corresponden a la energía cinética interna de la partícula cuántica porque $V = 0$ dentro del pozo. Por ejemplo, el electrón en el átomo de hidrógeno tiene una energía cinética interna mínima. Además, un átomo de hidrógeno libre puede realizar un movimiento de traslación con cualquier valor de energía cinética posible dentro de un conjunto continuo de valores positivos.

Sección 1.c. Radio de Bohr

El tamaño del átomo de hidrógeno se puede obtener semi cuantitativamente al darse una cuenta de que, en el átomo de hidrógeno, el electrón está aproximadamente atrapado en

una región esférica localizada de radio r . Por lo tanto, el radio de Bohr (r_B) se puede obtener fácilmente como el valor de r que minimiza la suma de la energía cinética de la partícula en una caja (Ec. (1.18) con $L = r$), más la energía potencial del electrón que se mueve lentamente en el átomo de hidrógeno [6, 9]:

$$E_{Sch}(r) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.19)$$

El primer término de $E_{Sch}(r)$, corresponde a la energía cinética no relativista del estado fundamental de una partícula cuántica atrapada y de movimiento lento con la masa del electrón ($m = m_e$). El segundo término corresponde a la energía potencial asociada a la atracción Coulombiana entre una partícula, con una carga igual a la carga del electrón ($-e$), y una carga positiva $+e$ situada en $r = 0$ [7]. $E_{Sch}(r)$ tiene un mínimo cuando [6, 9]:

$$r = r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{1}{\alpha} \lambda_C, \quad \text{con } \lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} \text{ y } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}. \quad (1.20)$$

En la Ec. (1.20), c es la velocidad de la luz en el vacío y ϵ_0 es la constante dieléctrica del vacío. Por lo tanto, el tamaño del átomo de hidrógeno es aproximadamente $1/\alpha \approx 137$ veces la longitud de onda Compton reducida del electrón, lo que confirma la suposición inicial de movimiento lento. El radio de Bohr es pequeño ($r_B \approx 0.05$ nm) pero no es nulo.

Capítulo 2. El modelo más simple de una partícula cuántica relativista confinada espacialmente

La energía cinética de las partículas clásicas es siempre positiva [7]. Como se discutió en el Capítulo 1, la energía cinética de las partículas cuánticas no relativistas con masa (m) también es siempre positiva [8]. Sin embargo, las partículas cuánticas relativistas pueden existir en dos tipos de estados cuánticos [2, 6]. Los estados cuánticos comunes son estados como los estados cuánticos no relativistas. Además, las partículas cuánticas relativistas pueden existir en estados exóticos que son muy diferentes de los estados cuánticos no relativistas. A diferencia de las partículas clásicas y las partículas cuánticas no relativistas, si una partícula cuántica relativista libre con masa se encuentra en un estado exótico, entonces su energía cinética tiene un valor negativo [6].

Los estados cuánticos que son soluciones de ecuaciones de onda relativistas (covariantes de Lorentz) se pueden agrupar en dos ramas [2, 6]. En la primera rama, referida a partir de este punto como la rama común, la energía relativista total de la partícula cuántica es $E_T = E + mc^2$. En la otra rama, referida a partir de este punto como la rama exótica, la energía total de la partícula cuántica es $E_T = E' - mc^2$. El apóstrofe (') adjunto a la variable que representa una magnitud se utilizará para ejemplificar la magnitud en un estado cuántico exótico.

En la mecánica cuántica relativista hay una antipartícula asociada a cada partícula elemental. La partícula asociada y la antipartícula tienen la misma masa y cargas de igual magnitud. Por el contrario, la partícula y la antipartícula

asociadas tienen cargas con signos opuestos. Por ejemplo, un positrón es la antipartícula asociada con el electrón. Como se discutirá más adelante, existe una estrecha relación entre los estados comunes de la antipartícula con $E_{Ta} = E_a + mc^2$ y los estados exóticos de la partícula con $E_T = E' - mc^2$ [2, 6].

Sección 2.a. Teoría de la relatividad especial

La teoría especial de la relatividad fue desarrollada en 1905 por Albert Einstein considerando únicamente la existencia de partículas clásicas [10]. En la teoría de la relatividad especial, las partículas libres tienen masa constante $m > 0$ y energía cinética $K \geq 0$. La relación entre la energía total (E_T) y el momento lineal de una partícula libre relativista viene dada por la siguiente ecuación [6, 10]:

$$E_T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \text{ with } p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \quad (2.1)$$

O:

$$E_T = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.2)$$

Para las partículas clásicas se debe tomar el signo + en la Ec. (2.2); por lo tanto:

$$E_T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.3)$$

De la Ec. (2.3), se deduce que cuando $p = 0$, entonces:

$$E_T = E_m = mc^2. \quad (2.4)$$

Entonces hay una energía ($E_m = mc^2$) asociada con la masa de una partícula relativista. Por consiguiente:

$$E_T = E + mc^2, \text{ con } E = K. \quad (2.5)$$

Sustituyendo E_T por $K + mc^2$ en la Ec. (2.3), obtenemos:

$$K + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \gamma mc^2, \text{ con } \gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \geq 1. \quad (2.6)$$

Nótese que la Ec. (2.6) da una fórmula alternativa para el factor de Lorentz. Esto se debe a que sustituyendo en la Ec. (2.6) p por γmv , que es la ecuación correspondiente al momento lineal relativista de una partícula relativista con masa m y velocidad v , obtenemos la definición habitual del factor de Lorentz [10]:

$$\gamma = \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.7)$$

A partir de la Ec. (2.6), obtenemos que la energía cinética de una partícula libre relativista viene dada por:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 \geq 0. \quad (2.8)$$

Sustituyendo la Ec. (2.8) en la Ec. (2.5), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$E_T = \gamma mc^2. \quad (2.9)$$

Junto con:

$$K = E = (\gamma - 1)mc^2. \quad (2.10)$$

A partir de la Ec. (2.10), obtenemos otra fórmula alternativa muy útil para γ para una partícula libre relativista [6]:

$$\gamma = 1 + \frac{K}{mc^2}. \quad (2.11)$$

Nótese que $\gamma \geq 1$ en la Ec. (2.11) porque para una partícula libre clásica $E = K \geq 0$. Una ecuación alternativa menos conocida pero particularmente útil para K se puede obtener de la Ec. (2.6):

$$\gamma^2 = 1 + \frac{p^2}{m^2c^2}. \quad (2.12)$$

Por lo tanto:

$$(\gamma + 1)(\gamma - 1)mc^2 = \frac{p^2}{m}. \quad (2.13)$$

De donde sigue que [6]:

$$(\gamma - 1)mc^2 = K = \frac{p^2}{(\gamma+1)m}. \quad (2.14)$$

Nótese que para las partículas clásicas $\gamma \approx 1$ en el límite no relativista; así, en este límite K y p están dadas por las fórmulas no relativistas [7]:

$$K = \frac{p^2}{2m}, \text{ con } p = mv. \quad (2.15)$$

Como se mostrará más adelante, es útil introducir el concepto de la masa relativista efectiva de una partícula libre como [6]:

$$\mu = \frac{1+\gamma}{2} m \geq m, \text{ con } \gamma = 1 + \frac{K}{mc^2}. \quad (2.16)$$

Así:

$$\mu = \left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right) m \geq m. \quad (2.17)$$

Usando las Ecs. (2.17) y (2.16), la Ec. (2.14) se puede reescribir como [6, 9, 11-12]:

$$K = \frac{p^2}{2\mu} \geq 0. \quad (2.18)$$

En esta monografía, las ecuaciones relativistas (2.16) a (2.18) son las ecuaciones relativistas más importantes válidas para las partículas clásicas libres.

Sección 2.b. Introducción de la relatividad especial en la mecánica cuántica

A diferencia de las partículas clásicas, una partícula cuántica relativista libre en estados exóticos puede tener $K' < 0$ [2, 6]. Sin embargo, las partículas cuánticas relativistas libres también pueden existir en estados cuánticos comunes donde $E_T = E + mc^2$ donde la partícula tiene $K > 0$. Para estos estados comunes, todas las fórmulas discutidas en la Sección 2.1 para partículas clásicas son válidas para una partícula cuántica relativista libre.

Además de los estados cuánticos en los que la partícula cuántica relativista libre tiene $K > 0$, una partícula cuántica relativista libre puede estar en otros estados cuánticos exóticos en los que $E_T = E' - mc^2$. En contraste con las partículas clásicas, las partículas cuánticas relativistas libres en estos estados exóticos tienen una energía cinética $K' < 0$. Para estos estados exóticos, las fórmulas discutidas anteriormente deben modificarse. La teoría especial de la relatividad fue desarrollada por Albert Einstein para las partículas clásicas. Por lo tanto, debemos tener cuidado al

extrapolar los resultados válidos para las partículas clásicas a las partículas cuánticas relativistas en estados exóticos donde $E_T = E' - mc^2$ [6].

Existen partículas y antipartículas en la Madre Naturaleza. Una antipartícula es una partícula que tiene la misma masa que la partícula asociada a ella, pero contiene una carga opuesta. Por ejemplo, el positrón es la antipartícula del electrón. Aunque tienen la misma masa, las cargas eléctricas de positrones y electrones son e y $-e$, respectivamente. De acuerdo con la teoría del mar de Dirac, la existencia de un agujero en el mar de Dirac significa que existe un estado cuántico exótico desocupado de una partícula cuántica libre con una energía total $E_T = E' - mc^2$ [2, 6]. Este agujero se percibe como una antipartícula que se mueve con la energía total $E_{Ta} = E_a + mc^2$ con $E_a = -E'$. En consecuencia, debido a la relación de $E_a = -E'$, podemos comenzar obteniendo las ecuaciones relativistas que son válidas para la antipartícula libre en los estados comunes con $E_{Ta} = E_a + mc^2$. Una vez que se encuentran y se conocen, se pueden deducir de ellas las ecuaciones relativistas válidas para los estados cuánticos exóticos de la partícula correspondiente [6].

Una antipartícula libre es también una "partícula" que siempre se observa experimentalmente con valores positivos de sus energías cinéticas ($K_a > 0$). En consecuencia, todas las ecuaciones obtenidas en la Sección 2.1 para una partícula clásica libre son también válidas para una antipartícula libre en un estado cuántico común. Esto significa que las ecuaciones (2.16) a (2.18) deben reescribirse para una antipartícula en un estado común de la siguiente manera [6]:

$$K_a = \frac{p^2}{2\mu_a}, \quad \text{con } \mu_a = \left(\frac{\gamma_a + 1}{2}\right)m = \left[1 + \frac{K_a}{2mc^2}\right]m. \quad (2.19)$$

Para una antipartícula libre con $E_{Ta} = E_a + mc^2$, Ec. (2.1) también es válido. Por lo tanto:

$$E_{Ta}^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \quad \text{con } p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \quad (2.20)$$

O:

$$E_{Ta} = E_a + mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \quad (2.21)$$

Usando la relación $E' = -E_a$, obtenemos:

$$\begin{aligned} -E_{Ta} &= -E_a - mc^2 = E' - mc^2 = E_T = \\ &-\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por lo tanto, si la partícula libre está en un estado exótico con $E_T = E' - mc^2$, de las Ecs. (2.21) y (2.22) se sigue cuando $p = 0$ que:

$$E_T = -E_{Ta} = -E_m = -mc^2. \quad (2.23)$$

Por lo tanto, mc^2 es el valor mínimo absoluto de E_T , si una partícula cuántica relativista libre está en un estado común donde $E_T = E + mc^2$ (Ec. (2.4)). Sin embargo, $-mc^2$ es el valor máximo absoluto de E_T , si una partícula cuántica relativista libre está en un estado exótico donde $E_T = E' - mc^2$ [6].

Como era de esperar, de la Ec. (2.22) se deduce que una antipartícula libre en un estado común satisface la Ec. (2.5):

$$E_{Ta} = E_a + mc^2, \text{ con } E_a = K_a. \quad (2.24)$$

Por lo tanto, en los estados exóticos es válida la siguiente ecuación:

$$E_T = -E_{Ta} = -(E_a + mc^2) = -K_a - mc^2. \quad (2.25)$$

Podemos reescribir la Ec. (2.25) como:

$$E_T = E' - mc^2, \text{ con } E' = K' = -E_a, \text{ and } K' = -K_a. \quad (2.26)$$

Por lo tanto, una partícula cuántica relativista libre tiene un valor de $E = K > 0$ en un estado común donde $E_T = E + mc^2$ (Ec. (2.5)). Sin embargo, $E' = K' = -Ka < 0$ en un estado exótico donde $E_T = E' - mc^2$.

Además, como era de esperar, sustituyendo E_{Ta} por $K_a + mc^2$ en Ec. (2.21), obtenemos para una antipartícula libre en un estado común la misma ecuación que es válida para la partícula libre correspondiente en un estado común (Ec. (2.6)):

$$K_a + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \gamma_a mc^2, \text{ con } \gamma_a = \sqrt{1 + \frac{p_a^2}{m^2 c^2}} \geq 1. \quad (2.27)$$

De las Ecs. (2.26) y (2.27), obtenemos [6]:

$$K_a = (\gamma_a - 1)mc^2 = -K'. \quad (2.28)$$

Sustituyendo Ka dada por la Ec. (2.27) en la Ec. (2.25), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$E_{Ta} = \gamma_a mc^2. \quad (2.29)$$

Y:

$$E_a = K_a = (\gamma_a - 1)mc^2. \quad (2.30)$$

Como era de esperar, las Ecs. (2.29) y (2.30) para una antipartícula libre en un estado común coinciden con las Ecs. (2.9) y (2.8), respectivamente, para una partícula cuántica relativista libre en un estado común. Además, a partir de la Ec. (2.30), obtenemos una fórmula alternativa para γ_a :

$$\gamma_a = 1 + \frac{K_a}{mc^2}. \quad (2.31)$$

Nótese que $\gamma_a > 1$ en la Ec. (2.31) cuando $K_a > 0$. Además, para partículas libres y antipartículas en estados comunes $\gamma_a = \gamma$, con γ dada por la Ec. (2.11).

Estamos interesados en obtener ecuaciones válidas para una partícula cuántica relativista libre en un estado exótico. Queremos obtener estas ecuaciones a partir de las ecuaciones válidas para la antipartícula libre correspondiente en un estado común. Si sustituimos K' dado por la Ec. (2.28) en la Ec. (2.26), obtenemos las siguientes ecuaciones para una partícula cuántica relativista libre en un estado exótico [6]:

$$E_T = -\gamma_a mc^2 = \gamma' mc^2. \quad (2.32)$$

Y:

$$E' = K' = (\gamma' + 1)mc^2. \quad (2.33)$$

De la Ec. (2.33), obtenemos una fórmula para γ' :

$$\gamma' = -1 + \frac{K'}{mc^2} \quad (2.34)$$

Nótese que en la Ec. (2.32) definimos $\gamma' = -\gamma_a$ como el factor de Lorentz correspondiente a una partícula cuántica relativista libre en un estado exótico donde $E_T = E' - mc^2$. En contraste con el factor de Lorentz para las partículas clásicas libres, $\gamma' < -1$ porque $\gamma_a > 1$.

Además, debido a $\gamma' = -\gamma_a$, la Ec. (2.12) también es válida para γ' , así:

$$(\gamma' - 1)(\gamma' + 1)mc^2 = \frac{p^2}{m}. \quad (2.35)$$

De las Ecs. (2.33) y (2.35), obtenemos [6]:

$$K' = \frac{p^2}{(\gamma' - 1)m} = \frac{p^2}{2\mu'}, \quad \text{con } \mu' = \left(\frac{\gamma' - 1}{2}\right)m = \left(-1 + \frac{K'}{mc^2}\right)m. \quad (2.36)$$

A continuación, hemos obtenido ecuaciones de energía cinética similares, $K = p^2/2\mu$ (Ec. (2.18)) y $K' = p^2/2\mu'$. Estas ecuaciones son válidas para ambos tipos de estados cuánticos. Sin embargo, las masas relativistas efectivas μ (Ec. (2.17)) y μ' son diferentes. Las ecuaciones que relacionan μ y γ (Ec. (2.16)) también son diferentes de las ecuaciones que relacionan μ' y γ' (Ec. (2.36)). Además, debido a la relación de $E_a = -E'$, se deduce que para una partícula cuántica libre $-\mu' = \mu_a$ (Ecs. (2.36) y (2.19)).

En resumen, si una partícula cuántica relativista libre está en un estado común, entonces las ecuaciones relativistas (2.16) a (2.18) son las ecuaciones relativistas más importantes. Sin embargo, si una partícula cuántica relativista libre se encuentra en un estado exótico, entonces estas ecuaciones

deben ser sustituidas por Ecs. (2.34) y (2.36). Esto también es válido para las antipartículas libres.

Cabe destacar que en las secciones 2.a y 2.b, se ha puesto el foco en las partículas cuánticas libres. Esto se debe a que esta monografía se basa en el modelo más simple de una partícula cuántica localizada, el pozo infinito [6]. La partícula cuántica está libre dentro del pozo infinito porque $V = 0$ allí.

Sección 2.c. Ecuaciones de Grave de Peralta

La masa es la única característica de una partícula cuántica libre presente en la ecuación de Schrödinger (Ec. (1.2)). Esto sugiere la idea no convencional de que es posible obtener dos ecuaciones relativistas similares a las de Schrödinger simplemente sustituyendo la masa de la partícula (m) en la ecuación de Schrödinger por las masas relativistas efectivas de la partícula cuántica en los estados común (μ) y exótico (μ'). Esta sustitución formal da como resultado las llamadas ecuaciones de Grave de Peralta para una partícula cuántica relativista libre [6, 9,11-12]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi, \quad \text{con } \mu = \left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right) m. \quad (2.37)$$

Y

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Omega = -\frac{\hbar^2}{2\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega, \quad \text{con } \mu' = \left(-1 + \frac{K'}{2mc^2}\right) m. \quad (2.38)$$

Si una partícula relativista libre está en un estado común con energía $E_T = E + mc^2$, entonces la Ec. (2.37) es válida. Si una

partícula relativista libre está en un estado exótico con energía $E_T = E' - mc^2$, entonces la Ec. (2.38) es válida. Una discusión general sobre las ecuaciones de Grave de Peralta se puede encontrar en otro lugar [6]. Aquí, se muestra a continuación una forma intuitiva pero precisa de obtener estas ecuaciones relativistas, que se basa en el uso de un primer procedimiento de cuantización [2, 6, 8-9, 11-12].

Por ejemplo, la ecuación de Schrödinger para una partícula cuántica libre se puede obtener a partir de la siguiente ecuación mecánica clásica no relativista (Ec. (2.15)):

$$E_T = K = \frac{p^2}{2m}, \text{ con } p = mv. \quad (2.39)$$

El procedimiento de primera cuantización consiste en cambiar la energía total de la partícula (E_T) y su momento lineal (p) en la Ec. (2.39) por los operadores cuánticos correspondientes [6, 8]:

$$E_T \rightarrow \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \text{ y } K \rightarrow \hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \text{ con } \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Este procedimiento permite obtener formalmente la Ec. (1.2). Del mismo modo, las ecuaciones de Grave de Peralta se pueden obtener utilizando las Ecs. (2.18) y (2.36). De las Ecs. (2.5) y (2.18) sigue la siguiente ecuación para una partícula cuántica relativista libre en un estado común:

$$E_T = K + mc^2, \text{ con } K = \frac{1}{2\mu} p^2, \text{ y } \mu = \left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right) m. \quad (2.41)$$

Tenga en cuenta que $K > 0$ y $\mu > m$. Haciendo en la Ec. (2.41) las sustituciones formales de primera cuantización dadas por la Ec. (2.40), obtenemos [6, 9, 11-12]:

$$\hat{H}\phi = (\hat{K} + mc^2)\phi \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + mc^2 \phi. \quad (2.42)$$

La ecuación (2.42) se asemeja a la ecuación unidimensional de Schrödinger para una partícula cuántica libre. Esta similitud se puede mejorar introduciendo una nueva función de onda:

$$\Psi = \phi e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}. \quad (2.43)$$

Nótese que ambas funciones de onda representan la misma densidad de probabilidad $\rho = |\Psi|^2 = |\phi|^2$. Finalmente, la Ec. (2.37) se puede obtener sustituyendo ϕ dada por la Ec. (2.43) en la Ec. (2.42).

Alternativamente, desde las Ecs. (2.26) y (2.36) sigue la siguiente ecuación para una partícula cuántica relativista libre en un estado exótico [6]:

$$E_T = K' - mc^2, \text{ con } K' = \frac{1}{2\mu'} p^2, \text{ y } \mu' = \left(-1 + \frac{K'}{2mc^2}\right) m. \quad (2.44)$$

Tenga en cuenta que $K' < 0$ y $\mu' < -1$. Como se discutió en las secciones 2.a y 2.b, la Ec. (2.44) no es una ecuación presente en la teoría de la relatividad especial porque esta teoría se desarrolló para partículas clásicas con $m > 0$ y $K \geq 0$. Sin embargo, podemos obtener la Ec. (2.38) haciendo en

la Ec. (2.44) las sustituciones formales de primera cuantización dadas por la Ec. (2.40):

$$\widehat{H}\Sigma = (\widehat{K}' - mc^2)\Sigma \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Sigma = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Sigma - mc^2\Sigma. \quad (2.45)$$

La ecuación (2.45) también se asemeja a la ecuación unidimensional de Schrödinger para una partícula cuántica libre. Esta similitud se puede mejorar introduciendo una nueva función de onda:

$$\Sigma = \Omega e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}. \quad (2.46)$$

Nótese que ambas funciones de onda representan la misma densidad de probabilidad $\rho = |\Sigma|^2 = |\Omega|^2$. Finalmente, la Ec. (2.38) se puede obtener sustituyendo Σ dado por la Ec. (2.46) en la Ec. (2.45).

El par de ecuaciones de Grave de Peralta es equivalente a la conocida ecuación de Klein-Gordon para una partícula cuántica sin espín libre con masa [2, 6]. Esto significa que las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con $E_T = K + mc^2$ se pueden encontrar resolviendo la Ec. (2.37). Además, las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con $E_T = K' - mc^2$ se pueden encontrar resolviendo la Ec. (2.38). Esto se puede demostrar fácilmente [4].

La ecuación independiente del tiempo correspondiente a la Ec. (2.37) es:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = E\varphi, \quad \text{con } \mu = \left(1 + \frac{E}{2mc^2}\right)m > m, \text{ y } E = K. \quad (2.47)$$

Al pre multiplicar ambos lados de la Ec. (2.47) por μ/m , sustituyendo μ por su valor en la Ec. (2.47) en la ecuación resultante, y después de una manipulación algebraica, obtenemos [66]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = \left(E + \frac{E^2}{2mc^2} \right) \varphi. \quad (2.48)$$

También podemos llegar a la Ec. (2.48) pero partiendo de la ecuación unidimensional de Klein-Gordon para una partícula sin espín libre con masa [2, 6]:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi_{KG} = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{KG} + m^2 c^4 \psi_{KG}. \quad (2.49)$$

Podemos obtener la ecuación de Klein-Gordon independiente del tiempo correspondiente a la Ec. (2.49) buscando soluciones estacionarias de la forma:

$$\psi_{KG}(r, t) = \varphi_{KG}(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E_T t}. \quad (2.50)$$

Sustituyendo la Ec. (2.50) en la Ec. (2.49), y después de varias manipulaciones algebraicas, obtenemos la ecuación unidimensional de Klein-Gordon independiente del tiempo [2, 6]:

$$-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_{KG} = (E_T^2 - m^2 c^4) \varphi_{KG}. \quad (2.51)$$

Luego, sustituyendo E_T por $E + mc^2$, y después de algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos [6]:

$$-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_{KG} = 2mc^2 \left(E + \frac{E^2}{2mc^2} \right) \varphi_{KG}. \quad (2.52)$$

Luego, después de dividir por $2mc^2$ ambos lados de la Ec. (2.52), obtenemos la Ec. (2.48). Hemos demostrado entonces que resolviendo la Ec. (2.37) o la Ec. (2.49), podríamos obtener las energías ($E = K$) y las funciones de onda (φ) correspondientes a una partícula cuántica libre relativista, sin espín y con masa, que contiene una energía total $E_T = E + mc^2$. Nótese que esta demostración requiere sustituir E_T por $E + mc^2$ en la Ec. (2.51).

De manera similar, la ecuación independiente del tiempo correspondiente a la Ec. (2.38) es:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vartheta = E' \vartheta, \quad \text{con } \mu' = \left(-1 + \frac{E'}{2mc^2}\right) m > m,$$

y $E' = K'$. (2.53)

Al pre multiplicar ambos lados de la Ec. (2.53) por μ' / m , sustituyendo μ' con su valor en la Ec. (2.53) en la ecuación resultante, y después de una manipulación algebraica, obtenemos [6]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vartheta = \left[E' - \frac{(E')^2}{2mc^2} \right] \vartheta. \quad (2.54)$$

También podemos llegar a la Ec. (2.54) pero partiendo de la ecuación unidimensional de Klein-Gordon independiente del tiempo para una partícula sin espín libre con masa (Ec. 2.51)). Después de sustituir E_T por $E' - mc^2$, y después de algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos [4]:

$$-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_{KG} = 2mc^2 \left[E' - \frac{(E')^2}{2mc^2} \right] \varphi_{KG}. \quad (2.55)$$

Luego, después de dividir por $2mc^2$ ambos lados de la Ec. (2.55), obtenemos la Ec. (2.54). Hemos demostrado

entonces que resolviendo la Ec. (2.38) o la Ec. (2.49), podríamos obtener las energías ($E' = K'$) y las funciones de onda (ϑ) correspondientes a una partícula cuántica libre relativista, sin espín y con masa, que contiene una energía total $E_T = E' - mc^2$. Nótese que esta demostración requiere sustituir E_T por $E' - mc^2$ en la Ec. (2.54).

Necesitamos resolver solo una ecuación de Schrödinger para describir el campo cuántico asociado a una partícula cuántica no relativista, pero debemos resolver dos ecuaciones similares a las de Schrödinger (Ecs. (2.37) y (2.38)) para una descripción completa del campo cuántico asociado a una partícula cuántica relativista. Este hecho se puede resumir de la siguiente colorida manera:

No hay una onda asociada con una partícula clásica, pero hay una onda asociada con una partícula cuántica no relativista con masa. Sin embargo, hay dos ondas asociadas con una partícula cuántica relativista con masa. Si la partícula está en un estado cuántico común, su energía total es $E_T = E + mc^2$, pero es $E_T = E' - mc^2$ si la partícula está en un estado cuántico exótico.

Sección 2.d. Una partícula cuántica relativista en el pozo infinito unidimensional

La energía cinética de una partícula cuántica no relativista atrapada en un pozo infinito aumenta cuando el tamaño del pozo (L) disminuye (Ec. (1.15)). Eventualmente, si el tamaño del pozo es demasiado pequeño, entonces $K \approx mc^2$ y el problema de una partícula cuántica confinada en un pozo

infinito se transforma en un problema relativista. Estrictamente, debido a la posibilidad de la creación de pares partícula-antipartícula cuando $K > 2mc^2$, es cuestionable que las partículas cuánticas relativistas puedan estar confinadas en una región muy pequeña del espacio [6]. Sin embargo, para simplificar una primera aproximación a una extensión relativista de las discusiones hechas en la Sección 1.b, podríamos descartar los efectos relacionados con la creación de pares partícula-antipartícula.

Si una partícula cuántica relativista libre pudiera estar absolutamente confinada en una región espacial pequeña, entonces las funciones de onda de la partícula cuántica relativista libre en los estados cuánticos comunes y exóticos podrían encontrarse resolviendo problemas muy similares a la Ec. (1.10) [6]:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t), & \text{if } 0 < x < L \\ \psi(x, t) &\equiv 0 & , \text{ en otro caso} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Y

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Omega(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega(x, t), & \text{if } 0 < x < L \\ \Omega(x, t) &\equiv 0 & , \text{ en otro caso} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Si una partícula relativista libre está en un estado común con energía $E_T = E + mc^2$, entonces deberíamos resolver la Ec. (2.56). Si una partícula relativista libre está en un estado exótico con energía $E_T = E' - mc^2$, entonces deberíamos resolver la Ec. (2.57). Convenientemente, las Ecs. (2.56) y

(2.57) se pueden obtener de la Ec. (1.10) después de sustituir m por μ y μ' , respectivamente. Esto sugiere que podemos resolver la Ec. (2.56) como se resolvió la Ec. (1.10) en la Sección 1.b. Además, para encontrar los valores posibles de K y K' , solo necesitamos encontrar los valores de K porque $K' = -K$.

Ahora estamos preparados para averiguar qué le sucede a una partícula cuántica relativista cuando está atrapada en una pequeña región espacial, y la partícula está en un estado cuántico común. La resolución de la Ec. (2.56) proporciona un modelo matemático crudo pero simple para esta fascinante situación física. Como se discutió anteriormente en la Sección 1.b, la parte espacial y las energías de los estados estacionarios correspondientes son soluciones del siguiente problema matemático [6, 9, 11-12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi &= -k^2 \varphi, \quad \text{if } 0 \leq x \leq L, \quad \text{con } k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}. \\ \varphi(x) &\equiv 0, \quad \text{en otro caso} \end{aligned} \tag{2.58}$$

Nótese que la partícula cuántica relativista está libre dentro del pozo; por lo tanto, $E = K$ y μ dada por la Ec. (2.37) son constantes dentro del pozo. En el límite no relativista, $E \ll mc^2$, por lo que $\mu \approx m$. Por lo tanto, en el límite no relativista, la Ec. (2.58) se reduce a la Ec. (1.11) que se resolvió en la sección 1.a. De las Ecs. (2.58) y (2.37) se deduce que, dentro del pozo infinito, $\mu \geq m$ y $k > 0$ son constantes para un valor dado de $E > 0$. Por esa razón, las soluciones estacionarias de la Ec. (2.58) vienen dadas por la siguiente expresión [6, 9, 11-12]:

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^{(rel)} t}, \text{ con } k_n = \frac{n\pi}{L}, \text{ and } n = 1, 2, \dots \quad (2.59)$$

Para la partícula cuántica relativista, las energías dependen de k_n y μ_n como E_n en la Ec. (1.15) depende de k_n y m :

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2\mu_n L^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu_n L^2} n^2. \quad (2.60)$$

Las ecuaciones (2.60) y (2.37) forman el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos variables:

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2\mu_n L^2}, \mu_n = \left(1 + \frac{E_n^{(rel)}}{2mc^2}\right) m. \quad (2.61)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2\mu_n L^2} = 2 \left(\frac{\mu_n}{m} - 1\right) mc^2 \Leftrightarrow \mu_n^2 - m\mu_n - \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{4c^2 L^2} = 0. \quad (2.62)$$

Debido a $E = K > 0$, debemos requerir que $\mu_n \geq m$. Dicho esto, las soluciones de la Ec. (2.62) son [6, 9, 11-12]:

$$\mu_n = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{m^2 c^2 L^2}}\right) m = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^2}{4} \left(\frac{\lambda_C}{L}\right)^2}\right) m, \text{ con } \lambda_C = \frac{h}{mc}. \quad (2.63)$$

Por lo tanto:

$$\gamma_n = \frac{2\mu_n}{m} - 1 = \sqrt{1 + \frac{n^2}{4} \left(\frac{\lambda_C}{L}\right)^2} > 1. \quad (2.64)$$

En las Ecs. (2.63) y (2.64), λ_C es la longitud de onda de Compton asociada con una partícula de masa m . Entonces, si la partícula está en el estado fundamental ($n = 1$), pues el límite no relativista ocurre ($\gamma \approx 1$ y $\mu_n \approx m$) cuando $L \gg \lambda_C$. La partícula viaja más rápido (γ aumenta) cuando aumenta el confinamiento espacial; es decir cuando el ancho del pozo (L) disminuye. Sustituyendo μ dada por la Ec. (2.63) en la Ec. (2.61), obtenemos [6, 9, 11-12]:

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{(1+\gamma_n) mL^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^2}{4} \left(\frac{\lambda_C}{L}\right)^2}\right) mL^2}. \quad (2.65)$$

En el límite no relativista (n pequeño, $L \gg \lambda_C$), la Ec. (2.65) coincide con la Ec. (1.15). Si $L \approx \lambda_C/2$, entonces la Ec. (2.65) se reduce a:

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{(1+\sqrt{1+n^2}) mL^2}. \quad (2.66)$$

El valor mínimo de la Ec. (2.66) es:

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{(1+\sqrt{2}) mL^2} > 0. \quad (2.67)$$

La relación entre las energías dadas por las Ecs. (2.66) y (1.15) es:

$$\frac{E_n^{(rel)}}{E_n} = \frac{2}{(1+\sqrt{1+n^2})}. \quad (2.68)$$

En consecuencia, cuando la partícula se mueve más rápido (n aumenta), la energía de la partícula altamente confinada disminuye en comparación con el valor de energía no relativista.

Existe una diferencia más notable en la diferencia de energía entre niveles de energía consecutivos ($\Delta E = E_{n+1} - E_n$) en los límites no relativista y ultra relativista. En el límite no relativista:

$$\Delta E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (2n+1). \quad (2.69)$$

Por lo tanto, ΔE aumenta a medida que n aumenta en el límite no relativista. Sin embargo, utilizando la Ec. (2.67) para estimar ΔE en el límite ultra relativista ($n \gg 1$), obtenemos:

$$\Delta E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} [(n+1) - n] = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2}. \quad (2.70)$$

Por lo tanto, ΔE es constante en el límite ultra relativista.

Finalmente, debido a la relación $K' = -K$, dentro de un pozo unidimensional infinito, si la partícula relativista libre con masa se encuentra en un estado exótico, entonces sus energías cinéticas satisfacen la siguiente ecuación:

$$E_n^{(ex)} = -E_n^{(rel)} = -\frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{(1+\sqrt{1+n^2})mL^2}. \quad (2.71)$$

El valor máximo de la Ec. (2.71) es:

$$E_n^{(ex)} = -\frac{\hbar^2 \pi^2}{(1+\sqrt{2})mL^2} < 0. \quad (2.72)$$

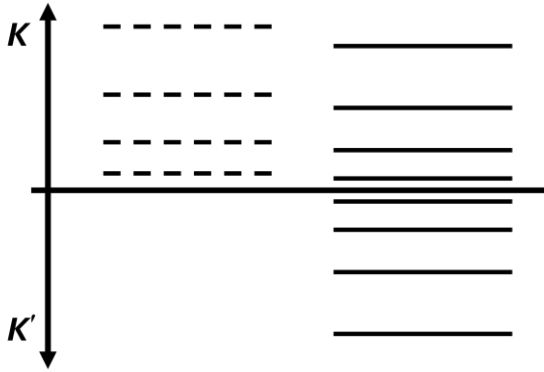


Fig. 2.1 Esquema de los valores de energía cinética (líneas discontinuas) no relativistas y (líneas continuas) relativistas en los primeros estados estacionarios de una partícula cuántica con masa confinada en un pozo infinito unidimensional.

En la Fig. 2.1 se muestra un esquema que muestra una comparación entre los valores de energía (líneas discontinuas) no relativistas y (líneas continuas) relativistas de los estados estacionarios de una partícula cuántica con masa m confinada en un pozo infinito unidimensional. Nótese que hay pares de estados cuánticos con energías totales $E_T = K_n + mc^2$ y $E_T = - (K_n + mc^2)$ asociados a una partícula cuántica relativista confinada espacialmente. Nótese también que los valores no relativistas de K_n (Ec. (1,15)) son mayores que los valores correspondientes de K_n (mismo valor de n) para la partícula relativista en un estado cuántico común (Ec. (2,66)).

Capítulo 3. Una partícula cuántica relativista podría interactuar consigo misma

No cabe duda de la existencia de numerosas partículas cuánticas que interactúan consigo mismas. Por ejemplo, el átomo de hidrógeno existe porque hay una interacción electromagnética entre el electrón y el protón que lo forma. Como se discutió en la Sección 1.c, podríamos usar un enfoque simple (Ec. (1.19)) para obtener respuestas cuantitativas satisfactorias sobre algunas propiedades de las partículas cuánticas. La ecuación (1.19) no es una ecuación de onda, sino una función aproximada correspondiente a la energía total del electrón en el átomo de hidrógeno. La energía total se estima igual a la suma de la energía cinética de una partícula cuántica no relativista con masa atrapada en un pozo infinito unidimensional (Ec. (1.15)) más la energía potencial del electrón debido a su interacción Coulombiana con el protón. El radio de Bohr se obtuvo encontrando un mínimo local de la función dada por la Ec. (1.19). El éxito del resultado obtenido justifica el uso de este enfoque simple, que no requiere resolver la ecuación de onda correspondiente, lo cual podría ser un formidable problema matemático.

Sección 3.a. Número de elementos de la tabla periódica

Un átomo similar al hidrógeno está formado por un núcleo con carga positiva $+Ze$ y un electrón. Podríamos usar el mismo enfoque aproximado discutido en la Sección 1.c para obtener una estimación bruta del tamaño (radio) de un átomo similar al hidrógeno. Suponiendo que el electrón es una

partícula no relativista, este radio (r_Z) se puede obtener fácilmente como el valor de r que minimiza la siguiente función [6, 9]:

$$E_{Sch}(r) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.1)$$

El primer término de $E_{Sch}(r)$, corresponde a la energía cinética no relativista del estado fundamental de una partícula atrapada y de movimiento lento con la masa del electrón ($m = m_e$). El segundo término corresponde a la energía potencial asociada a la atracción Coulombiana entre una partícula, con una carga igual a la carga del electrón ($-e$), y una carga positiva $+Ze$ situada en $r = 0$. La energía potencial es negativa debido a la interacción atractiva entre el electrón y el núcleo. $E_{Sch}(r)$ tiene un mínimo cuando [6, 9]:

$$r = a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e Z e^2} = \frac{r_B}{Z} = \frac{1}{\alpha Z} \lambda_C, \quad \text{con } \lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}. \quad (3.2)$$

Por lo tanto, la Ec. (3.2) predice que el tamaño de un átomo similar al hidrógeno con número atómico Z debería ser aproximadamente $1/\alpha Z$ veces la longitud de onda Compton reducida del electrón. Para el átomo de hidrógeno $Z = 1$, por lo tanto, $1/\alpha Z \approx 137$ veces la longitud de onda Compton reducida del electrón, lo que confirma la suposición inicial de movimiento lento. Sin embargo, el tamaño de un átomo similar al hidrógeno con número atómico $Z = 137$ es aproximadamente igual a la longitud de onda Compton reducida del electrón. Por lo tanto, el electrón se mueve a

velocidades relativistas si $Z \approx 137$ porque su energía cinética aproximadamente es:

$$K_{\lambda} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e\lambda_C^2} = \frac{1}{2} m_e c^2. \quad (3.3)$$

Esto significa que, si el número atómico $Z \gg 1$, entonces el electrón se mueve a velocidades relativistas en el estado fundamental de los átomos similares al hidrógeno. Por lo tanto, para obtener una mejor estimación del tamaño de los átomos similares al hidrógeno, debemos usar la Ec. (2.65) para modificar la Ec. (3.1) de la siguiente manera [6, 9]:

$$E_{GP}(r) \approx \frac{\hbar^2}{(\gamma+1)m_e r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{con } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r}\right)^2} > 1. \quad (3.4)$$

$E_{GP}(r)$ tiene un mínimo cuando [6, 9]:

$$r = r_Z = a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_C}{a}\right)^2}, \quad \text{con } a = \frac{r_B}{Z}. \quad (3.5)$$

Si $Z \ll 1/a \approx 137$, entonces $rZ \approx a$, que es el valor obtenido previamente para un electrón de movimiento lento (Ec. (3.2)). Sin embargo, cuando $Z \gg 1$, el electrón se mueve a velocidades relativistas, lo que hace que el factor de raíz cuadrada en la Ec. (3.5) se vuelva significativo.

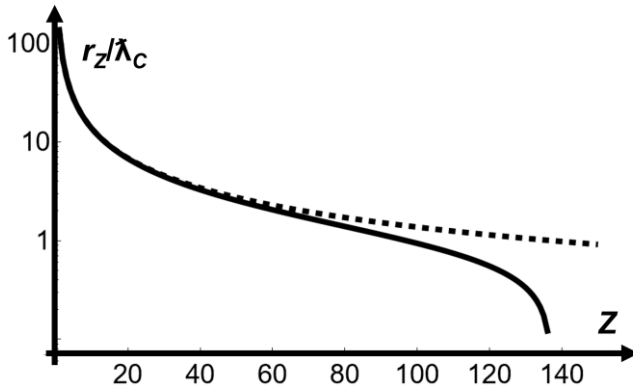


Fig. 3.1 (Curva discontinua) Estimaciones no relativistas y (curva continua) relativistas del radio (en unidades de longitud de onda de Compton reducidas) del campo cuántico común del electrón con $E_T = E + mc^2$ en átomos similares al hidrógeno [6, 9].

Como se muestra en la Fig. 3.1, la corrección relativista del tamaño del estado fundamental de los átomos similares al hidrógeno se vuelve significativa cuando $a \approx \lambda_C$. Además, el tamaño del átomo similar al hidrógeno se vuelve indefinido cuando $Z > 1/\alpha \approx 137$. Esto podría interpretarse como una predicción sobre la imposibilidad de la existencia natural de los elementos con $Z > 137$. Esta predicción coincide con la realidad observada. No se conoce ningún elemento con $Z > 118$.

Como se muestra en la Fig. 3.1, el campo cuántico común asociado al electrón colapsa hasta un punto cuando $a \approx \lambda_C$. Esto sugiere una explicación interesante para el número finito de elementos en la tabla periódica de elementos. Las

partículas clásicas no pueden formar átomos estables. La estabilidad observada de los átomos fue uno de los principales fenómenos inexplicados que impulsaron el desarrollo de la mecánica cuántica. Las partículas clásicas no pueden formar átomos estables, pero las partículas cuánticas sí. Es la existencia de un campo cuántico asociado a una partícula cuántica lo que hace que los átomos sean estables. Sin embargo, un electrón relativista que se mueve en un campo de Coulomb pierde la onda común asociada a él cuando $a \approx \lambda_C$. Esto explica el número finito de elementos en la tabla periódica. Nótese que la mecánica cuántica no relativista predeciría la existencia de elementos muy pesados en la Madre Naturaleza. El número finito de elementos en la tabla periódica solo puede explicarse combinando la mecánica cuántica y la relatividad especial.

Vale la pena señalar que si $a \approx \lambda_C$, entonces el valor absoluto de la energía potencial del electrón se puede estimar usando la Ec. (3.1):

$$|U_\lambda| \approx \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\lambda} = m_e c^2. \quad (3.6)$$

En consecuencia, ni la energía cinética del electrón (Ec. (3.3)) ni el valor absoluto de su energía potencial alcanzan valores ultra relativistas mayores de $2mc^2$. Esto justifica descartar en nuestro enfoque simple los efectos relacionados con la creación de pares partícula-antipartícula.

Por último, cabe destacar que hay dos ondas asociadas a una partícula cuántica relativista. Hemos discutido anteriormente sobre el tamaño del campo cuántico correspondiente a los estados cuánticos comunes de una

partícula cuántica relativista que se mueve en un potencial de Coulomb. Si la partícula cuántica relativista estuviera en un estado exótico, entonces la Ec. (3.4) debería sustituirse por la siguiente ecuación:

$$E'_{GP}(r) \approx -\frac{\hbar^2}{(\gamma+1)m_e r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.7)$$

Sin embargo, la Ec. (3.7) no tiene un extremo local porque tanto la energía cinética de la partícula cuántica en estados exóticos como su energía potencial son negativas. Esto significa que no hay colapso del campo cuántico asociado con los estados exóticos. Concluimos entonces que la partícula cuántica relativista no puede existir en una situación en la que la partícula no puede tener dos ondas, sino sólo una onda asociada a ella.

Sección 3.b. Gravedad

Cómo combinar la mecánica cuántica y las teorías de la relatividad general es un campo abierto de intensa investigación. Uno de los enfoques más simples en esta dirección consiste en utilizar la ecuación unidimensional de Schrödinger-Newton para una partícula cuántica libre [13-14]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) - Gm^2 \int \frac{|\psi(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (3.8)$$

En la Ec. (3.8), G es la constante gravitacional [6, 7, 9]. La Ec. (3.8) combina la mecánica cuántica no relativista y las teorías clásicas de la gravedad. La motivación para usar la

ecuación de Schrödinger-Newton es que la única propiedad de la partícula incluida en la ecuación de Schrödinger es la masa. Esto ha sido interpretado por algunos físicos como una sugerencia de que hay un campo cuántico (función de onda) asociado a cualquier objeto con masa. Por ejemplo, incluso debería haber una función de onda asociada a todo el Universo. Nuestras experiencias cotidianas sugieren fuertemente que cualquier cuerpo clásico extendido de masa m debería interactuar gravitacionalmente consigo mismo. Los agujeros negros existen debido a la interacción gravitacional entre las diferentes partes de su masa originalmente distribuida espacialmente. La enorme presión existente en el interior de los planetas adquiere el mismo origen. Si extrapolamos esto al mundo cuántico, entonces cualquier partícula cuántica con masa debería interactuar gravitacionalmente consigo misma. Si la partícula cuántica se mueve lentamente y la atracción gravitacional no es demasiado fuerte, entonces se justifica combinar la ecuación de Schrödinger con la gravitación newtoniana. Resolver la Ec. (3.8) es matemáticamente complicado porque la Ec. (3.8) es una ecuación no lineal [13]; sin embargo, si estamos interesados en obtener una estimación del tamaño del campo cuántico asociado a una partícula cuántica libre con masa en un estado común, podríamos simplificar el problema matemático a resolver proponiendo la siguiente modificación de la Ec. (3.1) [6, 9]:

$$E_{Sch}(r) \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{Gm^2}{r}. \quad (3.9)$$

En la Ec. (3.9), la atracción gravitacional newtoniana de la partícula consigo misma sustituye la interacción de Coulomb incluida en la Ec. (3.1). Debido a su tamaño nulo, el término

gravitacional en la Ec. (3.1) tendría que ser eliminado si la partícula cuántica no pudiera interactuar consigo misma. En este caso, el término de energía cinética de la Ec. (3.1) no tendría un mínimo local, lo que da como resultado una onda plana extendida infinitamente espacial como función de onda para una partícula libre con masa [8]. Por el contrario, $E_{Sch}(r)$ tiene un mínimo cuando [6, 9]:

$$r = a_G = \frac{\hbar^2}{Gm^3} = l_P \left(\frac{m_P}{m} \right)^3, \quad \text{con } l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}, \quad \text{y } m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}. \quad (3.10)$$

En la Ec. (3.10), l_P y m_P son la longitud y la masa de Planck, respectivamente.

A velocidades relativistas, la ecuación de Schrödinger-Newton (Ec. (3.8)) debe sustituirse por la ecuación de GP-Newton:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) - Gm^2 \int \frac{|\psi(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (3.11)$$

Y la Ec (3.9) debe sustituirse por la siguiente ecuación [6, 9]:

$$E_{GP}(r) \approx \frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} - \frac{Gm^2}{r}, \quad \text{con } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r} \right)^2}. \quad (3.12)$$

$E_{GP}(r)$ tiene un mínimo cuando [6, 9]:

$$r = r_m = a_G \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_C}{a_G}\right)^2} = l_P \left(\frac{m_P}{m}\right)^3 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{m_P}\right)^4} . \quad (3.13)$$

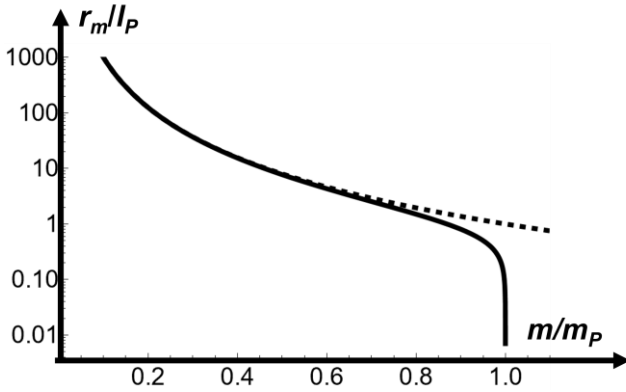


Fig. 3.2 (Curva discontinua) Estimaciones no relativistas y (curva continua) relativistas del radio (en unidades de longitud de Planck) del campo cuántico común con $E_T = E + mc^2$ para una partícula que interactúa gravitacionalmente consigo misma [6, 9].

Como se muestra en la Fig. 3.2, una consecuencia notable de la combinación de la mecánica cuántica, la teoría especial de la relatividad, y la gravedad newtoniana es la existencia de una masa crítica $m_c = m_P$ por encima de la cual el tamaño de la partícula se vuelve indefinido. Esta masa crítica podría interpretarse como la frontera entre el mundo cuántico y el mundo clásico de la materia [6, 9, 14]. Esto se debe a que el campo cuántico, asociado con una partícula cuántica relativista con masa m en un estado común, colapsa hasta un

punto cuando $m = m_P$. Cuando esto sucede, la partícula cuántica se transforma en una partícula clásica. Cabe señalar que el valor de masa de Planck ($m_P \approx 22 \mu\text{g}$) es bastante pequeño para tener que considerar toda la complejidad de la mecánica cuántica en la vida diaria. En contraste, es bastante grande en comparación con las masas moleculares y los experimentos cuánticos que se han realizado hasta la fecha. Curiosamente, las células biológicas, incluidas las neuronas humanas, podrían seguir siendo objetos cuánticos. En cualquier caso, la confirmación o rechazo experimental de esta hipótesis tendría consecuencias fundamentales para la mecánica cuántica y la cosmología. En particular, la confirmación de la existencia de m_c podría significar que no existe una función de onda universal, que el gato cuántico de Schrödinger no puede existir porque su masa es mucho mayor que m_P [6, 9], y que el mundo macroscópico que nos rodea es tan clásico como parece ser por la misma razón. Sin embargo, es importante darse cuenta de que los enormes cuerpos clásicos pueden ser formados por numerosas partículas cuánticas.

En particular, si $m \approx m_P$, entonces la partícula cuántica se mueve a velocidades relativistas, pero su energía cinética no alcanza valores ultra relativistas mayores que $2mc^2$. Esto se debe a que si $m \approx m_P$, entonces $r \approx l_P$. Por lo tanto, podríamos estimar K usando la Ec. (3.9):

$$K_{l_P} \approx \frac{\hbar^2}{2m_P l_P^2} = \frac{1}{2} mc^2. \quad (3.14)$$

Este valor es igual a la Ec. (3.3) porque la longitud de onda de Compton reducida de una partícula con masa $m = m_P$ es igual a la longitud de Planck:

$$\tilde{\lambda}_C = \frac{\hbar}{m_P c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = l_P. \quad (3.15)$$

Además, si $m \approx m_P$, el valor absoluto de la energía potencial gravitacional de una partícula con masa $m = m_P$ no alcanza valores ultra relativistas mayores que $2mc^2$:

$$|U_{l_P}| \approx \frac{Gm^2}{l_P} = mc^2. \quad (3.16)$$

Por lo tanto, descartar los efectos relacionados con la creación de pares partícula-antipartícula en nuestro enfoque simple está bien justificado.

Por último, cabe destacar que hay dos ondas asociadas a una partícula cuántica relativista. Hemos discutido anteriormente sobre el tamaño del campo cuántico correspondiente a los estados cuánticos comunes de una partícula cuántica relativista que interactúa gravitacionalmente consigo misma. Si la partícula cuántica relativista estuviera en un estado exótico, entonces la Ec. (3.12) debería sustituirse por la siguiente ecuación:

$$E'_{GP}(r) \approx -\frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} - \frac{Gm^2}{r}. \quad (3.17)$$

Sin embargo, la Ec. (3.17) no tiene un extremo local porque tanto la energía cinética de la partícula cuántica en estados exóticos como su energía potencial son negativas. Esto significa que no hay colapso del campo exótico cuántico asociado con una partícula cuántica relativista para cualquier valor de masa. Sin embargo, el colapso de uno de los dos campos cuánticos asociados con una partícula cuántica relativista con masa es suficiente para la inexistencia de la

partícula cuántica relativista en una situación en la que la partícula solo puede tener una onda asociada.

Sección 3.c. La carga de Planck

Debe quedar claro que las discusiones presentadas en las secciones 3.a y 3.b también son válidas para las antipartículas. Esto significa que, al igual que los átomos similares al hidrógeno, los átomos similares al anti-hidrógeno no podrían ser demasiado pesados (Sección 3.a). Esto también significa que los cuerpos de antimateria con una masa mayor que la masa de Planck deberían ser objetos clásicos. En las secciones 3.a y 3.b exploramos dos casos en los que existe una interacción atractiva.

Para variar, comencemos ahora refiriéndonos a las antipartículas y a los estados exóticos de las antipartículas. Nos centraremos ahora en describir la hipotética interacción Coulombiana repulsiva de una antipartícula cargada eléctricamente consigo misma. Si la antipartícula está en un estado exótico y tiene carga q , entonces la Ec. (3.7) debe ser sustituida por [6, 15-16]:

$$E'_{GPa}(r) \approx -\frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} , \quad \text{con } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r}\right)^2} . \quad (3.18)$$

$E'_{GPa}(r)$ tiene un máximo cuando [6, 15-16]:

$$r = r_q = \lambda_C \xi^{-2} \sqrt{1 - \xi^4}, \text{ con } \xi = \frac{q}{q_P}, \quad q_P = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c}. \quad (3.19)$$

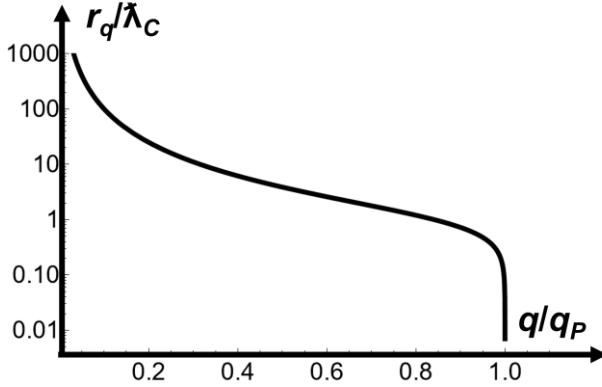


Fig. 3.3 Estimación relativista del radio (en unidades de longitud de Planck) del campo cuántico exótico para una antipartícula con $E_{Ta} = E'_a - mc^2$ que interactúa electrostáticamente consigo misma [6].

Por lo tanto, $\lambda_C \xi^{-2} \rightarrow \lambda_C$ (la longitud de onda de Compton reducida), cuando $|q| \rightarrow q_P \approx 11e$ (la carga de Planck). Además, $r \rightarrow 0$, cuando $|q| \rightarrow q_P$. Por lo tanto, como se muestra en la Fig. 3.3, una consecuencia notable de la combinación de la mecánica cuántica, la teoría especial de la relatividad y las auto interacciones Coulombianas repulsivas es la existencia de una carga crítica, $|q_c| = q_P$. Por encima de esta carga, el tamaño de la antipartícula se vuelve indefinido porque el campo cuántico exótico colapsa a un punto. Esta carga crítica podría interpretarse como la frontera entre el

mundo cuántico y el mundo clásico de la antimateria [6, 15-16].

Debe haber dos ondas asociadas con una antipartícula cuántica relativista. Hemos discutido anteriormente sobre el tamaño del campo cuántico correspondiente a los estados cuánticos exóticos de una antipartícula cuántica relativista que interactúa eléctricamente consigo misma. Si la antipartícula estuviera en un estado común, entonces la Ec. (3.18) debería sustituirse por la siguiente ecuación:

$$E_{GPa}(r) \approx \frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{con } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r}\right)^2}. \quad (3.20)$$

Sin embargo, la Ec. (3.20) no tiene un extremo local porque tanto la energía cinética de la antipartícula en estados comunes como su energía potencial son positivas. Esto significa que no hay colapso del campo cuántico asociado con los estados comunes de la antipartícula para ningún valor de su carga q . Sin embargo, el colapso de uno de los dos campos cuánticos asociados con una antipartícula cuántica relativista es suficiente para la inexistencia de la antipartícula en una situación en la que la antipartícula solo puede tener una onda asociada a ella. Esto significa que no deberían existir antipartículas cuánticas con el módulo de su carga eléctrica ($|q|$) mayor que la carga de Planck. De hecho, nunca ninguna antipartícula cuántica con $|q| > q_P$ ha sido observada.

En particular, si $|q| \approx q_P$, entonces la antipartícula cuántica se mueve a velocidades relativistas, pero ni la energía cinética de la antipartícula ni el valor absoluto de su energía potencial

(U) alcanzan valores ultra relativistas mayores que $2mc^2$. Esto se debe a que si $|q| \approx q_P$, luego $r \approx \lambda_C$. Por lo tanto, podríamos estimar el valor absoluto de $|K'|$ y U de la siguiente manera:

$$|K'_{\lambda_C}| \approx \frac{\hbar^2}{2m\lambda_C^2} = \frac{1}{2} mc^2, \text{ y } U_\lambda \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\lambda} = mc^2. \quad (3.21)$$

Por lo tanto, una vez más, descartar los efectos relacionados con la creación de pares partícula-antipartícula en nuestro enfoque simple está bien justificado.

Capítulo 4. Rompiendo la simetría partícula-antipartícula

Llegados a este punto, podemos centrar nuestra atención en la evidente asimetría entre materia y antimateria que existe en el mundo que nos rodea. Como se indicó en la Sección 3.3, las partículas y las antipartículas se forman en pares, por lo tanto, el número de partículas en el Universo debe ser igual al número de antipartículas [1-5]. El hecho de que parezca que vivimos en un Universo donde hay muchas más partículas que antipartículas es un misterio sin resolver [1, 4-5]. Además, nadie sabe por qué vivimos en un mundo formado casi exclusivamente por átomos y moléculas de materia. No parece existir vida antimaterial en el Universo. La mayoría de los físicos creen que la razón de esta enorme discrepancia entre la teoría y la realidad está relacionada con algún tipo de evento asimétrico desconocido que ocurrió en los inicios del Universo [1, 4-5]. Pero nadie sabe con certeza por qué y cómo se produce la asimetría observada.

Cabe destacar que todo lo comentado hasta este punto en esta monografía es estrictamente partícula-antipartícula simétrico. Por lo tanto, coincide en este aspecto con el panorama general proveniente del modelo estándar de la física de partículas [3]. Sin embargo, la interacción de una partícula fundamental consigo misma no está incluida en el modelo estándar de la física de partículas. Esto nos da la oportunidad teórica de proponer una forma de romper la simetría teórica entre la materia y la antimateria extendiendo adecuadamente el modelo estándar de la física de partículas. Esta extensión debería romper simultáneamente la simetría

teórica materia-antimateria e incluir la interacción de una partícula cuántica consigo misma.

Sección 4.a. Escasez de elementos de antimateria

Al plantear la hipótesis de que una partícula cuántica podría interactuar electrostáticamente consigo misma, podríamos encontrar una explicación simple para la escasez observada de elementos de antimateria ($Z < 2-3$) en comparación con el número relativamente mayor de elementos en la tabla periódica ($Z < 120$). Debemos agregar que la ruptura de la simetría requiere que una partícula cuántica interactúe consigo misma, pero de una manera diferente a como lo hace la antipartícula correspondiente. En la Sección 3, se propuso que la interacción Coulombica auto repulsiva de una antipartícula cargada eléctricamente resulta en la validez de las Ecs. (3.20) y (3.18). Esto corresponde a la validez de las siguientes ecuaciones de onda relativistas no lineales, respectivamente [15-16]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu_a} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_a(r, t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\psi_a(r', t)|^2}{|r'-r|} dr'. \quad (4.1)$$

Y

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Omega_a(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu'_a} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Omega_a(r, t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\Omega_a(r', t)|^2}{|r'-r|} dr'. \quad (4.2)$$

Si la antipartícula cargada está en un estado común, la Ec. (4.1) es válida. Si la antipartícula cargada se encuentra en un estado exótico, la Ec. (4.2) es válida. Por el contrario, la simetría materia-antimateria puede romperse proponiendo, en primer lugar, que la partícula correspondiente con carga $-q$ interactúa electrostáticamente consigo misma y, en segundo lugar, que las siguientes ecuaciones de onda son válidas para la partícula [15-16]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\psi(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (4.3)$$

Y

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Omega(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu'} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Omega(r, t) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\Omega(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (4.4)$$

Si la partícula cargada está en un estado común, la Ec. (4.3) es válida. Si la partícula cargada se encuentra en un estado exótico, la Ec. (4.4) es válida. Nótese que la simetría materia-antimateria se rompe porque las Ecs. (4.2) y (4.4), las ecuaciones de onda para los estados exóticos, no son iguales. Resolviendo las ecuaciones de ondas (Ecs. (4.1) a (4.4)) pueden presentar dificultades matemáticas notables debido a su carácter no lineal. Sin embargo, como se muestra en la sección 3.c, podríamos tener una estimación aproximada de la realidad física correspondiente a ellas resolviendo las Ecs. (3.18), (3.20) y la siguiente ecuación:

$$E'_{GP}(r) \approx -\frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{con } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r}\right)^2}. \quad (4.5)$$

A diferencia de la ecuación correspondiente al estado exótico de la antipartícula (Ec. (3.18)), la ecuación correspondiente al estado exótico de la partícula (Ec. (4.5)) no tiene un mínimo local. Por esta razón, la hipotética auto interacción Coulombiana rompe la simetría partícula-antipartícula. Nótese que si la partícula cuántica relativista está en un estado común, entonces la Ec. (3.20) también debería ser válida para la partícula cuántica relativista.

En consecuencia, solo el campo cuántico exótico asociado con la antipartícula podría colapsar hasta un punto debido a la interacción Coulombiana de la antipartícula consigo misma. Esta es una propuesta teórica que se sale del modelo estándar de la física de partículas. Esto se debe a que supone la interacción de cada partícula y antipartícula cuántica relativista consigo misma. Esta propuesta no afecta al modelo estándar de la física de partículas en su ámbito de aplicación, pero amplía la gama de aplicaciones de la mecánica cuántica relativista. Además, como se mostrará a continuación, esta propuesta teórica está fuertemente validada por la convincente coincidencia entre sus predicciones y la realidad física que nos rodea.

En primer lugar, podríamos explicar fácilmente la escasez observada de elementos químicos de antimateria cuando se compara con la abundancia relativa de elementos químicos en la tabla periódica. La estabilidad de los átomos es una consecuencia de la mecánica cuántica. En la mecánica

cuántica no relativista, es la existencia de una onda asociada a una partícula cuántica lo que hace que los átomos sean estables. En la mecánica cuántica relativista hay dos ondas asociadas con una partícula cuántica relativista. Los átomos y antiátomos son estables si y solo si hay dos ondas asociadas a la nube de electrones y positrones que rodean el núcleo, respectivamente.

Un átomo estable similar al hidrógeno requiere un electrón cuántico relativista atraído por el núcleo. Dos ondas deben estar asociadas con el electrón. Sin embargo, como se discutió en la Sección 3.a, si $Z > 137$, la onda común asociada al electrón colapsa a un punto. Esta predicción teórica coincide con la inexistencia de átomos con $Z > 137$. Esto también es válido para antiátomos similares al hidrógeno formados por un antiprotón y un positrón. Esto se debe a que las Ecs. (3.4) y (3.7) son igualmente válidos para átomos similares al hidrógeno y antiátomos similares al anti-hidrógeno.

Un antiátomo estable requiere una nube cuántica relativista de positrones atraídos por el núcleo. Dos ondas deben estar asociadas con la nube de positrones. Sin embargo, como se discutió en la Sección 3.c, si $Ze > q_p \approx 11e$, la onda exótica asociada a la nube de positrones colapsa hasta un punto. Esta predicción teórica coincide con la no existencia de antiátomos con $Z > 11$. Esto constituye una limitación adicional y más fuerte al número atómico de los antiátomos posibles. Sin embargo, debido a la Ec. (4.5), la onda exótica asociada con una nube de electrones nunca colapsa a un punto. En consecuencia, hay átomos de materia con $11 < Z < 137$. Esto explica la escasez observada de elementos de

antimateria en comparación con el número relativamente mayor de elementos en la Tabla Periódica [6, 15-16].

Sección 4.b. La antimateria biológica no puede existir

La predicción sobre la imposibilidad de la existencia de átomos con $Z > 137$ es una predicción correcta pero aproximada. Nunca se ha observado ningún átomo con $Z > 118$. Del mismo modo, la predicción sobre la imposibilidad de la existencia de antiátomos con $Z > 11$ es una predicción correcta pero aproximada. Nunca se ha observado ningún antiátomo con $Z > 2-3$. Podemos argumentar entonces que los antiátomos de carbono con $Z = 6$ no existen porque si $Z = 6$ el campo cuántico asociado al estado exótico de una nube de 6 positrones colapsa hasta cerca de un punto. La imposibilidad de la existencia de antiátomos de carbono explica por qué nunca hemos observado antimateria biológica [4, 15-16].

Sección 4.c. Agujeros negros primordiales y sumideros eléctricos de antimateria

Anteriormente, hemos argumentado que no hay una onda asociada con una partícula clásica, pero hay dos ondas asociadas con una partícula cuántica relativista. Si una de las ondas colapsa en un punto, entonces la partícula cuántica se transforma en una partícula clásica. Las partículas clásicas no pueden formar átomos estables.

Existe otra situación hipotética en la que el colapso del campo cuántico a un punto podría ser relevante [6, 15-16]. Se ha planteado la hipótesis de la posible existencia de agujeros negros primordiales con una masa relativamente pequeña. Los agujeros negros primordiales pueden haber sido creados hace unos trece mil millones de años, al comienzo de nuestro universo. Las fluctuaciones de masa con $m > m_P$ podrían haber producido su formación [13]. Como se discutió anteriormente, estas fluctuaciones de masa hipotéticas pueden haber formado objetos cuánticos relativistas primordiales. Si sus masas eran mayores que la masa de Planck, entonces el colapso a puntos de sus campos cuánticos comunes (Fig. 3.2) puede haber creado agujeros negros primordiales. En la actualidad, no hay evidencia observacional de la existencia de agujeros negros primordiales. Sin embargo, la posible existencia de estos agujeros negros de masa pequeña es un tema de investigación de gran interés.

De manera similar, los sumideros eléctricos primordiales de antimateria pueden haber sido creados hace unos trece mil millones de años, al comienzo de nuestro universo [6, 15-16]. Fluctuaciones de la carga de antimateria con $|q| > q_P$ podrían haber producido su formación. Como se discutió anteriormente, estas fluctuaciones hipotéticas de la carga de antimateria pueden haber formado objetos cuánticos relativistas primordiales. Si sus cargas eran mayores que la carga de Planck, entonces el colapso a puntos de sus campos cuánticos exóticos (Fig. 3.3) puede haber creado sumideros eléctricos primordiales de antimateria. Esto podría explicar la existencia de un exceso de materia cargada en el resto del universo [6, 15-16].

Capítulo 5. Energía oscura y constante cosmológica

Después de que se publicaran las ideas expuestas en los capítulos anteriores [6, 16], el autor de esta monografía se dio cuenta de que hay otra posible consecuencia de ellas. Esta está relacionada con una predicción muy conocida y extremadamente errónea de la mecánica cuántica relativista [1, 4].

Se puede obtener una estimación cruda de la densidad de energía del vacío cuántico al darse uno cuenta de que la masa de Planck es la masa máxima posible de cualquier partícula y antipartícula formada a partir del vacío cuántico (Ec. (3.13)). Por lo tanto, el vacío debe contener la siguiente energía para permitir la formación temporal de un par virtual partícula-antipartícula [2, 6]:

$$\Delta E = 2m_p c^2 . \quad (5.1)$$

El vacío, cuántico o no, debe ser homogéneo; por lo tanto, la densidad de energía del vacío debe ser la misma en todas partes. Se podría obtener una estimación bruta de la densidad de energía máxima del vacío (u_v) dividiendo ΔE por el volumen mínimo que podría tener una partícula cuántica (Ec. (3.15)):

$$V_{min} \approx l_p^3 . \quad (5.2)$$

En consecuencia [4]:

$$u_v \approx \frac{2m_p c^2}{l_p^3} = \frac{2c^7}{\hbar G^2} \approx 10^{114} \text{ J}/m^3 . \quad (5.3)$$

Cálculos más sofisticados (que también invocan un corte arbitrario para evitar un valor infinito de u_v) dan como

resultado un valor de $u_v \approx 10^{111} \text{ J/m}^3$ [4]. Estas son predicciones relativistas de la mecánica cuántica.

Por otro lado, actualmente se asume en Cosmología la existencia de energía oscura [1, 4]. La densidad de la energía oscura (u_d) debe venir dada por la siguiente ecuación [4]:

$$u_d = \rho_\Lambda c^2, \text{ con } \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \text{constante} . \quad (5.4)$$

En la Ec. (5.4), G y Λ son las constantes gravitacionales y cosmológicas, respectivamente. Esto implica un valor constante de u_d . Esto sugiere que la energía del vacío cuántico puede ser la naturaleza de la energía oscura. Desafortunadamente, el valor observacional actual de u_d es [4]:

$$u_d \approx 6 \times 10^{-10} \text{ J/m}^3 . \quad (5.5)$$

Por lo tanto, si identificamos u_d y u_v , entonces hay un enorme desajuste de unos 120 órdenes de magnitud entre la predicción relativista de la mecánica cuántica (u_v) y el valor observacional (u_d). Sin embargo, podríamos corregir la mecánica cuántica relativista de la siguiente manera.

Como hemos comentado en la sección 3.b, parece que la masa de Planck constituye una frontera entre el mundo cuántico y el clásico. Cualquier objeto con $m > m_P$ debería ser un objeto clásico, mientras que cualquier objeto con $m < m_P$ debería ser un objeto cuántico. La energía mínima de un objeto clásico libre es cero, mientras que la energía mínima de un objeto cuántico libre en un estado común es mayor que cero. Tanto el vacío cosmológico como el cuántico tienen una densidad de energía mayor que cero. El vacío clásico

está realmente vacío con una densidad de energía cero. En consecuencia, debido a la fórmula de Einstein $E = mc^2$, existe una masa asociada a los vacíos cosmológicos y cuánticos.

Considerando el vacío cuántico como un objeto, y utilizando el llamado radio del universo observable ($r_0 \approx 10^{26}$ m), podemos obtener la masa de todo el vacío en el universo (m_v):

$$m_d \approx \rho_\Lambda r_0^3 \gg 2m_P . \quad (5.6)$$

Por lo tanto, coincidiendo bien con el valor observacional de la densidad de la energía oscura (Ec. (5.5)), todo el vacío en el universo debería ser un objeto clásico con una densidad de energía nula o muy pequeña.

El vacío sólo puede ser cuántico si su masa es menor que el doble de la masa de Planck. El factor de dos es para permitir la formación de un par virtual partícula-antipartícula. Entonces, podríamos usar el valor observacional de la densidad de la energía oscura para estimar el radio mínimo del vacío cuántico (r_{qv}):

$$2m_P < m_d r_{qv}^3 \Rightarrow r_{qv} > \sqrt[3]{\frac{2m_P}{m_d}} \approx 10^6 m \gg l_P . \quad (5.7)$$

Esto revela el error en la estimación dada por Ec. (5.3), el radio del vacío cuántico no puede ser tan pequeño como la longitud de Planck, sino mucho mayor. Esta hipótesis implica que el vacío del universo, como un todo, es clásico, pero está formado por numerosos vacíos cuánticos independientes, $m_d/2m_P \approx 10^{60}$. Debe haber muchos más vacíos cuánticos independientes que estrellas en el universo.

**BIOLOGICAL
ANTIMATTER,
COSMOLOGICAL
CONSTANT, AND
RELATIVISTIC
QUANTUM
MECHANICS**

Book's Structure

Introduction (73-79)

Chapter 1. The simplest model of a spatially confined quantum particle (80-88)

Section 1.a. The Schrödinger equation (81-83)

Section 1.b. Infinite one-dimensional well (84-87)

Section 1.c. Bohr radius (87-88)

Chapter 2. The simplest model of a spatially confined relativistic quantum particle (89-110)

Section 2.a. Special relativity theory (90-93)

Section 2.b. Introducing special relativity in quantum mechanics (93-98)

Section 2.c. Grave de Peralta equations (98-104)

Section 2.d. A relativistic quantum particle in the one-dimensional infinite well (105-110)

Chapter 3. A relativistic quantum particle could interact with itself (111-124)

Section 3.a. Number of elements in the Periodic Table (111-115)

Section 3.b. Gravity (116-121)

Section 3.c. The Planck charge (121-124)

Chapter 4. Braking the particle-antiparticle symmetry (125-131)

Section 4.a. Shortage of antimatter elements (126-129)

Section 4.b. Biological antimatter cannot exist (129-130)

Section 4.c. Primordial black holes and antimatter electrical sinks (130-131)

Chapter 5. Dark energy and cosmological constant (132-134)

References (135-136)

About the author (138)

Additional links (139)

Introduction

Today, Science is at a crossroad. The following fragment is a good description of the current state of affairs in science [1]:

“The current Standard Model of Cosmology (SMC), also called the “Concordance Cosmological Model” or the “ Λ CDM Model,” assumes that the universe was created in the “Big Bang” from pure energy, and is now composed of about 5% ordinary matter, 27% dark matter, and 68% dark energy.

While the SMC is based primarily upon two theoretical models: (1) the Standard Model of Particle Physics (SMPP), which describes the physics of the very small in terms of quantum mechanics and the General Theory of Relativity (GTR), which describes the physics of the very large in terms of classical mechanics; it also depends upon several additional assumptions.

The main additional assumptions of the SMC are: (1) the universe was created in the Big Bang from pure energy; (2) the mass energy content of the universe is given by 5% ordinary matter, 27% dark matter, and 68% dark energy; (3) the gravitational interactions between the above three components of the mass energy content of the universe are described by the GTR; and (4) the universe is homogeneous and isotropic on sufficiently large (cosmic) scales.

Unfortunately, both the SMPP and the GTR are considered to be incomplete in the sense that they do not provide any understanding of several empirical observations. The SMPP

does not provide any understanding of the existence of three families or generations of leptons and quarks, the mass hierarchy of these elementary particles, the nature of gravity, the nature of dark matter, etc. The GTR does not provide any understanding of the Big Bang cosmology, inflation, the matter-antimatter asymmetry in the universe, the nature of dark energy, etc.

Furthermore, the latest version of the SMC, the Λ CDM Model is essentially a parameterization of the Big Bang cosmological model in which the GTR contains a cosmological constant, Λ , which is associated with dark energy, and the universe contains sufficiently massive dark matter particles, i.e., “cold dark matter.” However, both dark energy and dark matter are simply names describing unknown entities.”

Currently, there is no consent in how to construct a unified theory of quantum mechanics and general theory of relativity. However, it is well accepted the theory of relativistic quantum mechanics, which is a theory that unifies quantum mechanics and the special relativity theory [2]. Relativistic quantum mechanics, which is also named quantum electrodynamics, provided the template for all theories forming the standard model of particle physics [3]. Unfortunately, there are two mayor predictions of relativistic quantum mechanics that are evidently wrong when compared with current observational knowledge about the world we live in. These predictions refer to, first, the observed scarcity of antimatter in the universe and, second, to the enormous error in the quantum mechanics prediction of the so called cosmological constant and the abundance of

dark energy in the universe [1, 4]. In this monograph, the author advances a possible explanation of these mysteries.

We are surrounded by living beings made of matter. However, there are not known living beings made of antimatter. At first sight, this everyday fact looks so trivial that it doesn't justify any scientific curiosity about it. Unfortunately, there is a deep reason for this apparent lack of scientific curiosity.

The standard model of particle physics is currently considered by most physicists as our best theory about the physical fundamentals of our world [3]. In this theory, an antiparticle made of antimatter corresponds to each particle made of matter. The exceptions are some particles who are their own antiparticles. Particles and antiparticles are created from the quantum vacuum in pairs [2]. Moreover, the standard model of particle physics predicts that, besides a few exceptions, there should be a matter-antimatter symmetry in Nature [1-2, 5]. Consequently, a world where antimatter should be as abundant as matter is the big picture of the world predicted by the standard model of particle physics. This contradicts our everyday experiences. We are surrounded by matter, but antimatter is scarce in the known universe.

Moreover, we are surrounded by living being made of matter. However, no living beings made of antimatter have ever been observed. This looks like a huge wrong prediction of our best theory about the physical fundamentals of our world. Unfortunately, the apparent lack of scientific curiosity about the inexistence of biological antimatter may

be a subtle effort for hiding the shortcomings of our best physical theories.

In this monograph, the author advances a possible explanation of this mystery. Of course, the author's hypothesis should be a controversial one because it challenges current viewpoints in the standard model of particle physics. Looks like there is no other way of explaining our everyday experiences. The basic idea behind the author's hypothesis is this: each quantum particle and antiparticle interact with itself.

Why this simple idea is so controversial? Clearly, every macroscopic object surrounding us interacts with itself. For instance, the existence of magma in the interior of our planet is a consequence of the huge gravitational attraction of some parts of the Earth on another parts of it. Also, it is well known the existence of quantum objects that interact with themselves. For instance, the Hydrogen atom exists because there is an electromagnetic interaction between the electron and the proton forming it. The difficulty appears when we consider fundamental quantum particles. In the standard model of particle physics, the fundamental quantum particles are literally points with null size; therefore, fundamental particles like electrons do not have parts that could interact with each other.

In the standard model of particle physics, an electron is a mathematical point; therefore, an electron could not interact with itself. This extremely mathematical idea about the electron is challenged by the author in this monograph. The author concedes this is currently a controversial idea, but curiosity is in science's heart. In this monograph the authors

discuss how, maintaining the validity of relativistic quantum mechanics, but adopting the currently controversial idea that an electron like a positron could interact electrically with itself, we could explain the everyday experience of the absence of biological antimatter in our world.

This is not an easy-to-read book because it is assumed the validity of relativistic quantum mechanics [2-3], which is not an easy topic. Nevertheless, the author uses a simpler introduction to relativistic quantum mechanics recently proposed [6]. There is no use of the Dirac wave equation in this approach to relativistic quantum mechanics. Instead of the Dirac equation [2], this book is based in a simpler Schrödinger-like but relativistic wave equation, the so-called Grave de Peralta equation [6]. For simplicity, the discussion is based on the solution of the Grave de Peralta equation for the infinity well. This is the simplest model for a spatially localized relativistic quantum particle with mass. A semiquantitative discussion of the consequences of adding the interaction of the quantum particle with itself is presented.

Finally, the matter-antimatter symmetry is broken by postulating that a particle electrically interacts with itself in a different way that the corresponding antiparticle interacts with itself. It is shown a notable consequence of this hypothesis: this theory can explain our everyday experience of living in a world where only biological beings made of matter exist. This strongly suggests that current relativistic quantum mechanics should be expanded by including the interaction of each quantum particle and antiparticle with itself.

In addition, the author advances a hypothesis that could correct the extremely wrong predictions of quantum mechanics about the value of the cosmological constant in general relativity theory, and the abundance of dark energy related to it [4]. The vacuum in quantum mechanics is like a turbulent fluid filled with virtual particles that randomly appear and disappear [2-3]. An important consequence of this is that the quantum mechanics vacuum contains a large amount of energy [4]. This energy of the quantum vacuum is a possible candidate for being the nature of dark energy in modern cosmological theories [1, 4]. However, if the energy of the quantum vacuum were the nature of dark energy, then some quantum mechanics estimates of the dark energy density are in a humongous error of the order of 10^{120} [4]. The current observational value of the dark energy density is $\approx 10^{-10} \text{ J/m}^3$; however, a crude quantum mechanics estimate of the density of the quantum vacuum is $\approx 10^{111} \text{ J/m}^3$ [4].

The author of this monograph proposes a simple correction for the relativistic quantum mechanics estimate of the energy density of the vacuum. The quantum mechanics vacuum has energy; therefore, it has a mass associated to it. If we consider the quantum vacuum a quantum object with mass, then we could extrapolate to the vacuum the results obtained previously for any free quantum object with mass. I. e., the mass of the quantum vacuum must be smaller than the Planck mass. The vacuum is not a quantum vacuum but a classical vacuum when its mass surpasses the Plank mass. There is nothing in the classical vacuum. This explains the extremely low observational value of the dark energy density. Assuming that the energy of the quantum vacuum is the nature of dark energy, and using the observational value

of it, we obtain 1000 Km as a crude estimate of the maximum radius of the quantum vacuum.

The driving force of science has always been the infinite curiosity of human beings. The author invites the readers to follow him through this exercise of scientific curiosity.

Chapter 1. The simplest model of a spatially confined quantum particle

The description of classical particles corresponds with our everyday experiences of objects, small and humongous, which we perceive as spatially localized. We can certainly talk about the size of a classical particle. Moreover, our everyday experiences tell us that we are surrounded by classical particles. In Classical Mechanics, the translation of a classical particle is described through the description of the translation of its center of mass [7]. The center of mass is a mathematical point of null size. However, the classical particle has a no null size.

Quantum particles are different. There is a wave or quantum field associated with each quantum particle [8]. Nevertheless, like every particle, quantum particles are supposed to be spatially localized in some way. A quantum particle could be found anywhere its wavefunction or quantum field exists [8]; therefore, the particle character of a quantum particle could be associated with the spatial extension or size of the wavefunction associated to it. For instance, the Hydrogen atom is very small, but it is not a mathematical point without size. This is because the electron in the Hydrogen atom could be anywhere the wavefunction associated to the electron exist. The electron's wavefunction is spatially localized around the proton in the Hydrogen atom. This determines the small size of the Hydrogen atom. In Quantum Mechanics, a wave packet is usually used as the wavefunction associated to a free particle [8]. The spatial localization of the wave packet in a small region corresponds

to the intuitive spatial localization that every particle should have.

In nonrelativistic quantum mechanics the wavefunction associated to a quantum particle is found by solving the Schrödinger equation [8]. For this reason, some mathematical skills are required for a full understanding of Quantum Mechanics. Nevertheless, for reaching a maximum audience possible, we will use in this monograph the minimum amount of mathematics needed for achieving a good understanding of the first central topic addressed by this monograph, which is answering the question “where the biological antimatter is?”

Section 1.a. The Schrödinger equation

The basic difference between a classical and a quantum particle is that there is a wave associated with a quantum particle [6]. There is no wave associated with a classical particle. Different interpretations of quantum mechanics give different answers to the nature of the wave associated with a quantum particle [6, 8]. Nevertheless, all interpretations of quantum mechanics coincide in that the wavefunction corresponding to the wave associated with a nonrelativistic quantum particle is a solution of the Schrödinger equation [6, 8]. The one-dimensional Schrödinger equation for a nonrelativistic quantum particle with mass m is given by the following expression [6, 8]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x)\psi(x, t). \quad (1.1)$$

The solutions of this wave equation are the wavefunctions ψ that depend on the spatial (x) and temporal (t) variables. For simplicity, we discuss here only the one-dimensional Schrödinger equation. However, space is tridimensional; therefore, a more realistic wavefunction will depend on three spatial variables [6, 8]. In Eq. (1.1), $V(x)$ is a potential that only depends on the spatial variable, $\hbar = h/2\pi$ is the reduced Planck constant, and $i = \sqrt{-1}$ is the imaginary unit. Note that m and V are the only properties of the particle and the medium where the particle is, respectively, that are explicitly included in the Schrödinger equation. The wave associated with a free nonrelativistic quantum particle is a solution of the simplest Schrödinger equation possible ($V = 0$):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t). \quad (1.2)$$

Looking for stationary solutions of the form:

$$\psi(x, t) = \varphi(x)T(t). \quad (1.3)$$

Substituting Eq. (1.3) in Eq. (1.2) and dividing the result by φT , we obtain:

$$i\hbar \frac{\frac{d}{dt}T}{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\frac{d^2}{dx^2}\varphi}{\varphi}. \quad (1.4)$$

Both sides of Eq. (1.4) should be equal for all values of x and t . Consequently, each side of Eq. (1.4) should be equal to the same constant. Let's call it for convenience E . We will see later that E is an excellent name because, as we will find out later, E is the eigenvalue of the eigenequation corresponding to total energy of the particle. In this way we can reduce the task of solving Schrödinger equation, that is an equation in

partial derivatives involving second-order derivatives, to the simpler task of solving a system of the following two differential equations:

$$i\hbar \frac{d}{dt} T = ET . \quad (1.5)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi = E\varphi . \quad (1.6)$$

For obvious reasons, Equation (1.6) is called the time-independent Schrödinger equation [8]. By solving the time-independent Schrödinger equation, we can find the eigenfunctions (φ) and the eigenvalues (E) corresponding to the energy of the free nonrelativistic quantum particle. It is easy to check by simple substitution on it, that the following function is a solution of Eq. (1.5):

$$T(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} . \quad (1.7)$$

Consequently, if φ is a solution of the time-independent Schrödinger equation (Eq. (1.6)), then the following is a stationary solution of the Schrödinger equation (Eq. (1.2)):

$$\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} . \quad (1.8)$$

The simplest way to obtain a reasonably good approximation to the wavefunction (φ) of a free quantum particle is assuming that, for some reason, the wavefunction associated to the particle is absolutely confined in a very small space region [4].

Section 1.b. Infinite one dimensional well

While the temporal dependence of the stationary solutions of the Schrödinger equation is always given by Eq. (1.7), the eigenfunctions (φ) and eigenvalues (E) of the Schrödinger equation (Eq. (1.1)) are different for different potentials [6, 8]. Possibly, the crudest but simplest possible model of a “free” quantum particle is then a particle absolutely confined in the open segment $0 < x < L$. The wavefunction in such a model should be null in the rest of the line. In particular, $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$ at all times. This supposes that the particle should be moving in a repulsive potential infinitely large in the regions $x \leq 0$ and $x \geq L$. The simplest of such potentials is the so-called infinite one-dimensional well [6, 8]:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 < x < L \\ +\infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.9)$$

This choice of potential implies that the particle is like a free particle inside of the well. This problem reduces to solving the following mathematical problem:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t), & \text{if } 0 < x < L \\ \psi(x, t) &\equiv 0, & \text{otherwise} \end{aligned} \quad (1.10)$$

The stationary solutions of Eq. (1.10) are of the form given by Eq. (1.8), where φ is a solution of:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t) &= -k^2 \varphi, & \text{if } 0 < x < L \\ \varphi(x, t) &\equiv 0, & \text{otherwise} \end{aligned}, \quad \text{with } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (1.11)$$

If $E \geq 0$, then $k \geq 0$; therefore, the general solution of the time-independent Schrödinger equation in Eq. (1.11) is:

$$\varphi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx). \quad (1.12)$$

But:

$$\varphi(0) = B = 0. \quad (1.13)$$

Thus:

$$\varphi(L) = A\sin(kL) \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, \text{ with } n = 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

Therefore, the eigenfunctions and eigenvalues of the time-independent Schrödinger equation in Eq. (1.11) are:

$$\varphi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ and } E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2, \text{ with } n = 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

The constant A can be found from the normalization condition [6, 8]:

$$\langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = 1 = \int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = A^2 L \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{L}}. \quad (1.16)$$

Consequently, the stationary solutions of the Schrödinger equation in a one-dimensional infinite well are:

$$\psi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}. \quad (1.17)$$

We should stop now and discuss the physical meaning of the mathematical results that we obtained. We should not get

lost in mathematical formalism and forget why we were interested in solving Eq. (1.10). We proposed Eq. (1.10) as the Schrödinger equation corresponding to a simple but crude approximation of a quantum particle completely confined in a small space region. This is a simple approximation because it is a one-dimensional problem and because the infinite well potential is used. It is a crude approach for the same reasons. Nevertheless, as will be discussed below, the obtained results can explain why Hydrogen atoms are stable and why their spectra are formed by a discrete set of bright or dark lines [6].

The only possible values of the energy of the stationary states of a quantum particle with mass m that is confined in a small spatial region are given by Eq. (1.15). Therefore, the minimum possible energy value is:

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} > 0. \quad (1.18)$$

The existence of non-null minimum value of the energy means that the spatially localized particle cannot lose more energy if it is in its ground state ($n = 1$). This explains the stability of the Hydrogen atom. Moreover, from Eq. (1.15) follows that a quantum particle with mass m that is confined in a small spatial region must have a discrete frequency spectrum. It should be noted that Eq. (1.15) does not correctly predict the experimentally observed spectrum of the Hydrogen atom. This could be expected because the electron in the Hydrogen atom is not moving in an infinite well potential (Eq. (1.9)) but in the Coulomb potential produced by the proton. Nevertheless, it is amazing that both the stability of the Hydrogen atoms and the discrete

character of their spectra are just consequences of the spatial localization of the quantum particle.

It should also be noted that the energy values given by Eq. (1.15) correspond to the internal kinetic energy of the quantum particle because $V = 0$ inside the well. For instance, the electron in the Hydrogen atom has a minimum internal kinetic energy. In addition, a free Hydrogen atom can be realizing a translation movement with any possible kinetic energy value from a continuum set of positive values.

Section 1.c. Bohr radius

The size of the Hydrogen atom can be semi-quantitatively obtained by realizing that, in the Hydrogen atom, the electron is approximately trapped in a localized spherical region of radius r . Therefore, the Bohr radius (r_B) can easily be obtained as the value of r that minimizes the sum of the particle-in-a-box kinetic energy (Eq. (1.18) with $L = r$), plus the potential energy of the slow-moving electron in the Hydrogen atom [6, 9]:

$$E_{Sch}(r) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.19)$$

The first term of $E_{Sch}(r)$, corresponds to the non-relativistic kinetic energy of the ground state of a trapped and slow-moving quantum particle with the electron mass ($m = m_e$). The second term corresponds to the potential energy associated with the Coulombic attraction between a particle, with a charge equal to the electron charge ($-e$), and a positive

charge $+e$ placed at $r = 0$ [7]. $E_{Sch}(r)$ has a minimum when [4, 10]:

$$r = r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{1}{\alpha} \lambda_C, \quad \text{with } \lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} \quad \text{and } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}. \quad (1.20)$$

In Eq. (1.20), c is the speed of the light in the vacuum and ϵ_0 is the dielectric constant of the vacuum. Therefore, the size of the Hydrogen atom is approximately $1/\alpha \approx 137$ times the electron's reduced Compton wavelength, which confirms the initial slow-moving assumption. The Bohr radius is small ($r_B \approx 0.05$ nm) but is not null.

Chapter 2. The simplest model of a spatially confined relativistic quantum particle

The kinetic energy of classical particles is always positive [7]. As discussed in Chapter 1, the kinetic energy of nonrelativistic quantum particles with mass (m) is always positive too [8]. However, relativistic quantum particles can exist in two kinds of quantum states [2, 6]. Common quantum states are states like nonrelativistic quantum states. In addition, relativistic quantum particles can exist in exotic states which are very different than nonrelativistic quantum states. In contrast with classical particles and nonrelativistic quantum particles, if a free relativistic quantum particle with mass is in an exotic state, then its kinetic energy has a negative value [6].

The quantum states that are solutions of relativistic (Lorentz's covariant) wave equations can be grouped into two branches [2, 6]. In the first branch, referred from this point on as the common branch, the total relativistic energy of the quantum particle is $E_T = E + mc^2$. In the other branch, referred from this point on, as the exotic branch, the total energy of the quantum particle is $E_T = E' - mc^2$. The apostrophe (') attached to the variable representing a magnitude will be used to exemplify the magnitude in an exotic quantum state.

In relativistic quantum mechanics there is an antiparticle associated with each elemental particle. The associated particle and the antiparticle have the same mass and charges of equal magnitude. On the contrary, the associated particle and antiparticle have charges with opposite signs. For instance, a positron is the antiparticle associated with the

electron. As will be discussed below, there is a close relationship between the antiparticle common states with $E_{Ta} = E_a + mc^2$ and the particle exotic states with $E_T = E' - mc^2$ [2, 6].

Section 2.a. Special relativity theory

The special theory of relativity was developed in 1905 by Albert Einstein considering only the existence of classical particles [10]. In special relativity theory, free particles have constant mass $m > 0$ and kinetic energy $K \geq 0$. The relationship between the total energy (E_T) and the linear momentum of a relativistic free particle is given by the following equation [6, 10]:

$$E_T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \text{ with } p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \quad (2.1)$$

Or:

$$E_T = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.2)$$

For classical particles the + sign in Eq. (2.2) must be taken; therefore:

$$E_T = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.3)$$

From Eq. (2.3), it follows when $p = 0$, then:

$$E_T = E_m = mc^2. \quad (2.4)$$

There is then an energy ($E_m = mc^2$) associated with the mass of a relativistic particle. Consequently:

$$E_T = E + mc^2, \text{ with } E = K. \quad (2.5)$$

Substituting E_T with $K + mc^2$ in Eq. (2.3), we obtain:

$$K + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \gamma mc^2, \text{ with } \gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \geq 1. \quad (2.6)$$

Note that Eq. (2.6) gives an alternative formula for the Lorentz factor. This is because substituting in Eq. (2.6) p by γmv , which is the equation corresponding to the relativistic linear momentum of a relativistic particle with mass m and speed v , we obtain the customary definition of the Lorentz factor [10]:

$$\gamma = \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.7)$$

From Eq. (2.6), we obtain the kinetic energy of a relativistic free particle is given by:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 \geq 0. \quad (2.8)$$

Substituting Eq. (2.8) in Eq. (2.5), we obtain the following equations of:

$$E_T = \gamma mc^2. \quad (2.9)$$

Along with:

$$K = E = (\gamma - 1)mc^2. \quad (2.10)$$

From Eq. (2.10), we obtain another very useful alternative formula for γ for a relativistic free particle [6]:

$$\gamma = 1 + \frac{K}{mc^2}. \quad (2.11)$$

Note that $\gamma \geq 1$ in Eq. (2.11) because for a classical free particle $E = K \geq 0$. An unfamiliar but particularly useful alternative equation for K can be obtained from Eq. (2.6):

$$\gamma^2 = 1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}. \quad (2.12)$$

Therefore:

$$(\gamma + 1)(\gamma - 1)mc^2 = \frac{p^2}{m}. \quad (2.13)$$

Thus [6]:

$$(\gamma - 1)mc^2 = K = \frac{p^2}{(\gamma+1)m}. \quad (2.14)$$

Note that for classical particles $\gamma \approx 1$ in the nonrelativistic limit; thus, in this limit K and p are given by the nonrelativistic formulas [7]:

$$K = \frac{p^2}{2m}, \quad \text{with } p = mv. \quad (2.15)$$

As it will be shown later, it is useful to introduce the concept of the effective relativistic mass of a free particle as [6]:

$$\mu = \frac{1+\gamma}{2} m \geq m, \quad \text{with } \gamma = 1 + \frac{K}{mc^2}. \quad (2.16)$$

Thus:

$$\mu = \left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right) m \geq m. \quad (2.17)$$

Using Eqs. (2.17) and (2.16), Eq. (2.14) can be rewritten as [4, 8-10]:

$$K = \frac{p^2}{2\mu} \geq 0. \quad (2.18)$$

In this monograph, Eq. (2.16) to (2.18) are the more important relativistic equations valid for free classical particles.

Section 2.b. Introducing special relativity in quantum mechanics

In contrast to classical particles, a free relativistic quantum particle in exotic states can have $K' < 0$ [2, 6]. Nevertheless, free relativistic quantum particles can also exist in common quantum states where $E_T = E + mc^2$ and the particle has $K > 0$. For these common states, all the formulas discussed in Section 2.1 for classical particles are valid for a free relativistic quantum particle.

In addition to quantum states where the free relativistic quantum particle has $K > 0$, a free relativistic quantum particle can be in other exotic quantum states where $E_T = E' - mc^2$. In contrast with classical particles, free relativistic quantum particles in these exotic states have kinetic energy $K' < 0$. For these exotic states, the formulas discussed above should be modified. The special theory of relativity was developed by Albert Einstein for classical particles. Therefore, we must be careful in extrapolating the valid results for classical particles to relativistic quantum particles in exotic states where $E_T = E' - mc^2$ [6].

There exist particles and antiparticles in Mother Nature. An antiparticle is a particle that has the same mass as the associated particle but contains an opposite charge. For instance, the positron is the antiparticle of the electron. Although they have the same mass, the positron and electron electric charges are e and $-e$, respectively. According to the Dirac's Hole Theory, the existence of a hole in Dirac's Sea means there exists an unoccupied exotic quantum state of a free quantum particle with total energy $E_T = E' - mc^2$ [2, 6]. This hole is perceived as an antiparticle moving with total energy $E_{Ta} = E_a + mc^2$ and $E_a = -E'$. Consequently, due to the relation of $E_a = -E'$, we can start by obtaining the relativistic equations which are valid for the free antiparticle in the common states with $E_{Ta} = E_a + mc^2$. After they are found and known, the relativistic equations valid for the exotic quantum states of the corresponding particle can be deduced from them [6].

An antiparticle is also a "particle" that it is always experimentally observed with positive values of its kinetic energies ($K_a > 0$). Consequently, all the equations obtained in Section 2.1 for a free classical particle are also valid for a free antiparticle in a common quantum state. This means that Eq. (2.16) to (2.18) should be rewritten for an antiparticle in a common state in the following way [66]:

$$K_a = \frac{p^2}{2\mu_a}, \quad \text{with } \mu_a = \left(\frac{\gamma_a + 1}{2}\right) m = \left[1 + \frac{K_a}{2mc^2}\right] m. \quad (2.19)$$

For a free antiparticle with $E_{Ta} = E_a + mc^2$, Eq. (2.1) is also valid. Therefore:

$$E_{Ta}^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad \text{with} \quad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2. \quad (2.20)$$

Or:

$$E_{Ta} = E_a + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.21)$$

Using the relation $E' = -E_a$, we obtain:

$$\begin{aligned} -E_{Ta} &= -E_a - mc^2 = E' - mc^2 = E_T = \\ &-\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Therefore, if the free particle is in an exotic state with $E_T = E' - mc^2$, from Eqs. (2.21) and (2.22) follows when $p = 0$ that:

$$E_T = -E_{Ta} = -E_m = -mc^2. \quad (2.23)$$

Therefore, mc^2 is the absolute minimum value of E_T , if a free relativistic quantum particle is in a common state where $E_T = E + mc^2$ (Eq. (2.4)). However, $-mc^2$ is the absolute maximum value of E_T , if a free relativistic quantum particle is in an exotic state where $E_T = E' - mc^2$ [6].

As expected, from Eq. (2.22) follows that a free antiparticle in a common state satisfies Eq. (2.5):

$$E_{Ta} = E_a + mc^2, \quad \text{with} \quad E_a = K_a. \quad (2.24)$$

Thus, in the exotic states the following equation is valid:

$$E_T = -E_{Ta} = -(E_a + mc^2) = -K_a - mc^2. \quad (2.25)$$

We can rewrite Eq. (2.25) as:

$$E_T = E' - mc^2, \text{ with } E' = K' = -E_a, \text{ and } K' = -K_a. \quad (2.26)$$

Therefore, a free relativistic quantum particle has a value of $E = K > 0$ in a common state where $E_T = E + mc^2$ (Eq. (2.5)). However, $E' = K' = -K_a < 0$ in an exotic state where $E_T = E' - mc^2$.

Also, as expected, substituting E_{Ta} by $K_a + mc^2$ in Ec. (2.21), we obtain for a free antiparticle in a common state the same equation that is valid for the corresponding free particle in a common state (Eq. (2.6)):

$$K_a + mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \gamma_a mc^2, \text{ with } \gamma_a = \sqrt{1 + \frac{p_a^2}{m^2 c^2}} \geq 1. \quad (2.27)$$

From Eqs. (2.26) and (2.27), we obtain [6]:

$$K_a = (\gamma_a - 1)mc^2 = -K'. \quad (2.28)$$

Substituting K_a given by Eq. (2.27) in Eq. (2.25), we obtain the following equations:

$$E_{Ta} = \gamma_a mc^2. \quad (2.29)$$

And:

$$E_a = K_a = (\gamma_a - 1)mc^2. \quad (2.30)$$

As expected, Eqs. (2.29) and (2.30) for a free antiparticle in a common state match Eqs. (2.9) and (2.8), respectively, for a free relativistic quantum particle in a common state. Also, from Eq. (2.30), we obtain an alternative formula for γ_a :

$$\gamma_a = 1 + \frac{K_a}{mc^2}. \quad (2.31)$$

Note that $\gamma_a > 1$ in Eq. (2.31) when $K_a > 0$. Also, for free particles and antiparticles in common states $\gamma_a = \gamma$, with γ given by Eq. (2.11).

We are interested in obtaining equations valid for a free relativistic quantum particle in an exotic state. We want to obtain these equations from the equations valid for the corresponding free antiparticle in a common state. If we substitute K' given by Eq. (2.28) in Eq. (2.26), we obtain the following equations for a free relativistic quantum particle in an exotic state [6]:

$$E_T = -\gamma_a mc^2 = \gamma' mc^2. \quad (2.32)$$

And:

$$E' = K' = (\gamma' + 1)mc^2. \quad (2.33)$$

From Eq. (2.33), we obtain a formula for γ' :

$$\gamma' = -1 + \frac{K'}{mc^2} \quad (2.34)$$

Note that in Eq. (2.32) we defined $\gamma' = -\gamma_a$ as the Lorentz factor corresponding to a free relativistic quantum particle in an exotic state where $E_T = E' - mc^2$. In contrast with the Lorentz factor for free classical particles, $\gamma' < -1$ because $\gamma_a > 1$.

Also, due to $\gamma' = -\gamma_a$, Eq. (2.12) is also valid for γ' , thus:

$$(\gamma' - 1)(\gamma' + 1)mc^2 = \frac{p^2}{m}. \quad (2.35)$$

From Eqs. (2.33) and (2.35), we obtain [4]:

$$K' = \frac{p^2}{(\gamma'-1)m} = \frac{p^2}{2\mu'}, \quad \text{with } \mu' = \left(\frac{\gamma'-1}{2}\right)m = \left(-1 + \frac{K'}{mc^2}\right)m. \quad (2.36)$$

We have then obtained similar kinetic energy equations, $K = p^2/2\mu$ (Eq. (2.18)) and $K' = p^2/2\mu'$. These equations are valid for both kinds of quantum states. However, the effective relativistic masses μ (Eq. (2.17)) and μ' are different. The equations relating μ and γ (Eq. (2.16)) are also different than the equations relating μ' and γ' (Eq. (2.36)). Also, due to the relation of $E_a = -E'$, it follows that for a free quantum particle $-\mu' = \mu_a$ (Eqs. (2.36) and (2.19)).

In summary, if a free relativistic quantum particle is in a common state, then Eq. (2.16) to (2.18) are the more important relativistic equations. However, if a free relativistic quantum particle is in a exotics state, then these equations should be substituted by Eqs. (2.34) and (2.36). This is also valid for free antiparticles.

It should be noted that in Sections 2.a and 2.b, the focus has been put on free quantum particles. This is because this monograph is based on the simplest model of a localized quantum particle, the infinite well [6]. The quantum particle is free inside of the infinite well because $V = 0$ there.

Section 2.c. Grave de Peralta equations

The mass is the only feature of a free quantum particle present in the Schrödinger equation (Eq. (1.2)). This

suggests the unconventional idea that it is possible to obtain two Schrödinger-like but relativistic equations just by substituting the mass of the particle (m) in the Schrödinger equation by the effective relativistic masses of the quantum particle in the common (μ) and exotic (μ') states. This formal substitution results in the so-called Grave de Peralta equations for a free relativistic quantum particle [6, 9, 11-12]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi, \quad \text{with } \mu = \left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right) m. \quad (2.37)$$

And

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Omega = -\frac{\hbar^2}{2\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega, \quad \text{with } \mu' = \left(-1 + \frac{K'}{2mc^2}\right) m. \quad (2.38)$$

If a free relativistic particle is in a common state with energy $E_T = E + mc^2$, then Eq. (2.37) is valid. If a free relativistic particle is in an exotic state with energy $E_T = E' - mc^2$, then Eq. (2.38) is valid. A general discussion about the Grave de Peralta equations could be found elsewhere [6]. Here, it is shown below an intuitive but precise way for obtaining these relativistic equations, which is based on using a first quantization procedure [2, 6, 8-9, 11-12].

For instance, the Schrödinger equation for a free quantum particle can be obtained from the following nonrelativistic classical mechanic equation (Eq. (2.15)):

$$E_T = K = \frac{p^2}{2m}, \quad \text{with } p = mv. \quad (2.39)$$

The first quantization procedure consists in changing the total energy of the particle (E_T) and its linear momentum (p) in Eq. (2.39) by the corresponding quantum operators [6, 8]:

$$E_T \rightarrow \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \text{ and } K \rightarrow \hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \text{ with } \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.40)$$

This procedure allows for formally obtaining Eq. (1.2). Similarly, the Grave de Peralta equations can be obtained using Eqs. (2.18) and (2.36). From Eqs. (2.5) and (2.18) follows the following equation for a free relativistic quantum particle in a common state:

$$E_T = K + mc^2, \text{ with } K = \frac{1}{2\mu} p^2, \text{ and } \mu = \left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right) m. \quad (2.41)$$

Note that $K > 0$ and $\mu > m$. Making in Eq. (2.41) the formal first quantization substitutions given by Eq. (2.40), we obtain [6, 9, 11-12]:

$$\hat{H}\phi = (\hat{K} + mc^2)\phi \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\phi = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + mc^2\phi. \quad (2.42)$$

Equation (2.42) resembles the one-dimensional Schrödinger equation for a free quantum particle. This similarity can be improved by introducing a new wavefunction:

$$\Psi = \phi e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}. \quad (2.43)$$

Note that both wavefunctions represent the same probability density $\rho = |\Psi|^2 = |\phi|^2$. Finally, Eq. (2.37) can be obtained by substituting ϕ given by Eq. (2.43) in Eq. (2.42).

Alternatively, from Eqs. (2.26) and (2.36) follows the following equation for a free relativistic quantum particle in an exotic state [6]:

$$E_T = K' - mc^2, \text{ with } K' = \frac{1}{2\mu'} p^2, \text{ and } \mu' = \left(-1 + \frac{K'}{2mc^2}\right) m. \quad (2.44)$$

Note that $K' < 0$ and $\mu' < -1$. As discussed in Sections 2.a and 2.b, Eq. (2.44) is not a proper equation in special relativity theory because this theory was developed for classical particles with $m > 0$ and $K \geq 0$. Nevertheless, we can obtain Eq. (2.38) by making in Eq. (2.44) the formal first quantization substitutions given by Eq. (2.40):

$$\widehat{H}\Sigma = (\widehat{K}' - mc^2)\Sigma \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Sigma = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Sigma - mc^2 \Sigma. \quad (2.45)$$

Equation (2.45) also resembles the one-dimensional Schrödinger equation for a free quantum particle. This similarity can be improved by introducing a new wavefunction:

$$\Sigma = \Omega e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}. \quad (2.46)$$

Note that both wavefunctions represent the same probability density $\rho = |\Sigma|^2 = |\Omega|^2$. Finally, Eq. (2.38) can be obtained by substituting Σ given by Eq. (2.46) in Eq. (2.45).

The pair of Grave de Peralta equations is equivalent to the well-known Klein-Gordon equation for a free spinless quantum particle with mass [2, 6]. This means that the solutions of the Klein-Gordon equation with $E_T = K + mc^2$ can be found by solving Eq. (2.37). Also, the solutions of the Klein-Gordon equation with $E_T = K' - mc^2$ can be found by solving Eq. (2.38). This can be easily demonstrated [6].

The time independent equation corresponding to Eq. (2.37) is:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = E\varphi, \quad \text{with } \mu = \left(1 + \frac{E}{2mc^2}\right) m > m, \\ \text{and } E = K. \quad (2.47)$$

By pre-multiplying both sides of Eq. (2.47) by μ/m , substituting μ with his value in Eq. (2.47) into the resulting equation, and after some algebraic manipulation, we obtain [6]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = \left(E + \frac{E^2}{2mc^2}\right) \varphi. \quad (2.48)$$

We can also arrive at Eq. (2.48) but from starting from the one-dimensional Klein-Gordon equation for a free spinless particle with mass [2, 6]:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi_{KG} = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{KG} + m^2 c^4 \psi_{KG}. \quad (2.49)$$

We can obtain the time independent Klein-Gordon equation corresponding to Eq. (2.49) by looking for stationary solutions of the form:

$$\psi_{KG}(r, t) = \varphi_{KG}(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E_T t}. \quad (2.50)$$

Substituting Eq. (2.50) in Eq. (2.49), and after several algebraic manipulations, we obtain the time independent one-dimensional Klein-Gordon equation [2, 6]:

$$-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_{KG} = (E_T^2 - m^2 c^4) \varphi_{KG}. \quad (2.51)$$

Then, substituting E_T by $E + mc^2$, and after some algebraic manipulations, we obtain [6]:

$$-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_{KG} = 2mc^2 \left(E + \frac{E^2}{2mc^2} \right) \varphi_{KG}. \quad (2.52)$$

Then, after dividing by $2mc^2$ both sides of Eq. (2.52), we obtain Eq. (2.48). We have then demonstrated that by solving either Eq. (2.37) or Eq. (2.49), we could obtain the energies ($E = K$) and wavefunctions (φ) corresponding to a free spinless relativistic quantum particle with mass containing a total energy $E_T = E + mc^2$. Note that this demonstration requires substituting E_T by $E + mc^2$ in Eq. (2.51).

In a similar way, the time independent equation corresponding to Eq. (2.38) is:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vartheta = E' \vartheta, \quad \text{with } \mu' = \left(-1 + \frac{E'}{2mc^2} \right) m > m, \\ \text{and } E' = K'. \end{aligned} \quad (2.53)$$

By pre-multiplying both sides of the Eq. (2.53) by μ' / m , substituting μ' with his value in Eq. (2.53) into the resulting equation, and after some algebraic manipulation, we obtain [6]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vartheta = \left[E' - \frac{(E')^2}{2mc^2} \right] \vartheta. \quad (2.54)$$

We can also arrive at Eq. (2.54) but from starting from the time-independent one-dimensional Klein-Gordon equation for a free spinless particle with mass (Eq. 2.51)). After substituting E_T by $E' - mc^2$, and after some algebraic manipulations, we obtain [4]:

$$-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_{KG} = 2mc^2 \left[E' - \frac{(E')^2}{2mc^2} \right] \varphi_{KG}. \quad (2.55)$$

Then, after dividing by $2mc^2$ both sides of Eq. (2.55), we obtain Eq. (2.54). We have then demonstrated that by solving either Eq. (2.38) or Eq. (2.49), we could obtain the energies ($E' = K'$) and wavefunctions (ϑ) corresponding to a free spinless relativistic quantum particle with mass containing a total energy $E_T = E' - mc^2$. Note that this demonstration requires substituting E_T by $E' - mc^2$ in Eq. (2.54).

We need to solve just one Schrödinger equation for describing the quantum field associated to a nonrelativistic quantum particle, but we must solve two Schrödinger-like equations (Eqs. (2.37) and (2.38)) for a full description of the quantum field associated to a relativistic quantum particle. This fact can be summarized in the following colorful way:

There is no wave associated with a classical particle, but there is a wave associated with a nonrelativistic quantum particle with mass. However, there are two waves associated with a relativistic quantum particle with mass. If the particle is in a common quantum state, its total energy is $E_T = E + mc^2$, but it is $E_T = E' - mc^2$ if the particle is in an exotic quantum state.

Section 2.d. A relativistic quantum particle in the one-dimensional infinite well

The kinetic energy of a nonrelativistic quantum particle trapped in an infinite well increases when the size of the well (L) decreases (Eq. (1.15)). Eventually, if the size of the well is too small, then $K \approx mc^2$ and the problem of a quantum particle confined in an infinite well transforms itself in a relativistic problem. Strictly, due to the possibility of the creation of particle-antiparticle pairs when $K > 2mc^2$, it is questionable that relativistic quantum particles could be confined in a very small region of the space [6]. Nevertheless, for simplicity in a first approximation to a relativistic extension of the discussions made in Section 1.b, we could disregard the effects related with the creation of particle-antiparticle pairs.

If a free relativistic quantum particle could be absolutely confined in a small spatial region, then the wavefunctions of the free relativistic quantum particle in the common and exotic quantum states could be found solving problems very similar to Eq. (1.10) [6]:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t), & \text{if } 0 < x < L \\ \psi(x, t) &\equiv 0 & , \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (2.56)$$

And

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Omega(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu'} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega(x, t), & \text{if } 0 < x < L \\ \Omega(x, t) &\equiv 0 & , \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (2.57)$$

If a free relativistic particle is in a common state with energy $E_T = E + mc^2$, then we should solve Eq. (2.56). If a free relativistic particle is in an exotic state with energy $E_T = E' - mc^2$, then we should solve Eq. (2.57). Conveniently, Eqs. (2.56) and (2.57) can be obtained from Eq. (1.10) after substituting m by μ and μ' , respectively. This suggests that we can solve Eq. (2.56) as Eq. (1.10) was solved in Section 1.b. Moreover, for finding the possible values of K and K' , we only need to find the values of K because $K' = -K$.

We are now prepared to find out what happens to a relativistic quantum particle when it is trapped in a small spatial region, and the particle is in a common quantum state. Solving Eq. (2.56) provides a crude, but simple mathematical model for this riveting physical situation. As discussed above in Section 1.b, the spatial part and the energies of the corresponding stationary states are solutions of the following mathematical problem [6, 9, 11-12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi &= -k^2 \varphi, & \text{if } 0 \leq x \leq L, & \text{ with } k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}. \\ \varphi(x) &\equiv 0 & , & \text{otherwise} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Note that the relativistic quantum particle is free inside the well; therefore, $E = K$ and μ given by Eq. (2.37) are constant inside of the well. In the non-relativistic limit, $E \ll mc^2$, so $\mu \approx m$. Therefore, in the non-relativistic limit, Eq. (2.58) reduces to the Eq. (1.11) that was solved in the previous Section 1.a. From Eqs. (2.58) and (2.37) follow that inside of the infinite well, $\mu \geq m$ and $k > 0$ are constants for a given value of $E > 0$. For that reason, the stationary solutions of the

Eq. (2.58) are given by the following expression [6, 9, 11-12]:

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^{(rel)} t}, \quad \text{with } k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{and } n = 1, 2, \dots \quad (2.59)$$

For the relativistic quantum particle, the energies depend on k_n and μ_n as E_n in Eq. (1.15) depends on k_n and m :

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2\mu_n L^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu_n L^2} n^2. \quad (2.60)$$

Equations (2.60) and (2.37) form the following system of two equations with two variables:

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2\mu_n L^2}, \quad \mu_n = \left(1 + \frac{E_n^{(rel)}}{2mc^2}\right) m. \quad (2.61)$$

Therefore:

$$\frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2\mu_n L^2} = 2 \left(\frac{\mu_n}{m} - 1\right) mc^2 \Leftrightarrow \mu_n^2 - m\mu_n - \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{4c^2 L^2} = 0. \quad (2.62)$$

Due to $E = K > 0$, we should require that $\mu_n \geq m$. With that being said, the solutions of Eq. (2.62) are [6, 9, 11-12]:

$$\mu_n = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{m^2 c^2 L^2}}\right) m = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^2}{4} \left(\frac{\lambda_C}{L}\right)^2}\right) m, \quad \text{with } \lambda_C = \frac{h}{mc}. \quad (2.63)$$

Therefore:

$$\gamma_n = \frac{2\mu_n}{m} - 1 = \sqrt{1 + \frac{n^2}{4} \left(\frac{\lambda_C}{L}\right)^2} > 1. \quad (2.64)$$

In Eqs. (2.63) and (2.64), λ_C is the Compton wavelength associated with a particle of mass m . So, if the particle is in the ground state ($n = 1$), then the nonrelativistic limit occurs ($\gamma \approx 1$ and $\mu_n \approx m$) when $L \gg \lambda_C$. The particle travels faster (γ increases) when the spatial confinement increases; that is when the width of the well (L) decreases. Substituting μ given by Eq. (2.63) in Eq. (2.61), we obtain [4, 8-10]:

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{(1 + \gamma_n) m L^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^2}{4} \left(\frac{\lambda_C}{L}\right)^2}\right) m L^2}. \quad (2.65)$$

In the non-relativistic limit (n small, $L \gg \lambda_C$), Eq. (2.65) coincides with Eq. (1.15). If $L \approx \lambda_C/2$, then Eq. (2.65) reduces to:

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{(1 + \sqrt{1 + n^2}) m L^2}. \quad (2.66)$$

The minimum value of Eq. (2.66) is:

$$E_n^{(rel)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{(1 + \sqrt{2}) m L^2} > 0. \quad (2.67)$$

The ratio between the energies given by Eqs. (2.66) and (1.15) is:

$$\frac{E_n^{(rel)}}{E_n} = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 + n^2})}. \quad (2.68)$$

Consequently, when the particle moves faster (n increases), the energy of the highly confined particle decreases in comparison with the nonrelativistic energy value.

A more notable difference exists in the energy difference between consecutive energy levels ($\Delta E = E_{n+1} - E_n$) at the nonrelativistic and ultra-relativistic limits. At the nonrelativistic limit:

$$\Delta E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (2n+1). \quad (2.69)$$

Therefore, ΔE increases as n increases at the nonrelativistic limit. However, using Eq. (2.67) for estimating ΔE at the ultra-relativistic limit ($n \gg 1$), we obtain:

$$\Delta E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} [(n+1) - n] = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2}. \quad (2.70)$$

Therefore, ΔE is constant at the ultra-relativistic limit.

Finally, due to the relationship $K' = -K$, inside an infinite one-dimensional well, if the free relativistic particle with mass is in an exotic state, then its kinetic energies satisfy the following equation:

$$E_n^{(ex)} = -E_n^{(rel)} = -\frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{(1+\sqrt{1+n^2})mL^2}. \quad (2.71)$$

The maximum value of Eq. (2.71) is:

$$E_n^{(ex)} = -\frac{\hbar^2 \pi^2}{(1+\sqrt{2})mL^2} < 0. \quad (2.72)$$

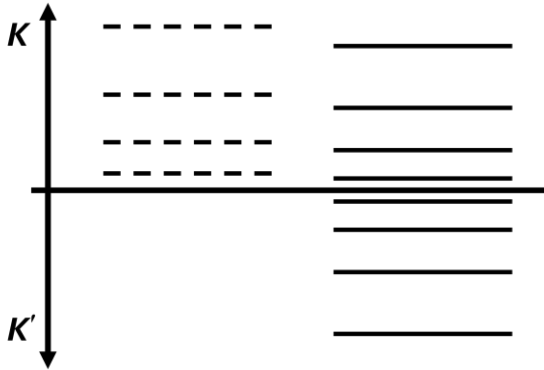


Fig. 2.1 Schematic of (discontinuous lines) non-relativistic and (continuous lines) relativistic kinetic energy values in the first stationary states of a quantum particle with mass confined in a one-dimensional infinite well.

A schematic showing a comparison between the (discontinuous lines) nonrelativistic and (continuous lines) relativistic energy values of the stationary states of a quantum particle with mass m confined in a one-dimensional infinite well is shown in Fig. 2.1. Note that there are pairs of quantum states with total energies $E_T = K_n + mc^2$ and $E_T = -(K_n + mc^2)$ associated with a spatially confined relativistic quantum particle. Also note that the non-relativistic values of K_n (Eq. (1.15)) are larger than the corresponding values of K_n (same value of n) for the relativistic particle in a common quantum state (Eq. (2.66)).

Chapter 3. A relativistic quantum particle could interact with itself

There is no doubt about the existence of numerous quantum particles that do interact with itself. For instance, the Hydrogen atom exists because there is an electromagnetic interaction between the electron and the proton forming it. As discussed in Section 1. c, we could use a simple approach (Eq. (1.19)) for obtaining satisfactory quantitative responses about some properties of quantum particles. Equation (1.19) is not a wave equation, but an approximate function corresponding to the total energy of the electron in the Hydrogen atom. The total energy is estimated as equal to the sum of the kinetic energy of a nonrelativistic quantum particle with mass trapped in a one-dimensional infinite well (Eq. (1.15)) plus the potential energy of the electron due to its Coulombic interaction with the proton. The Bohr radius was obtained by finding a local minimum of the function given by Eq. (1.19). The success of the obtained result justifies the use of this simple approach instead of trying to solve the corresponding wave equation, which could be a more formidable mathematical problem.

Section 3.a. Number of elements in the Periodic Table

A Hydrogen-like atom is formed by a nucleus with positive charge $+Ze$ and one electron. We could use the same approximated approach discussed in Section 1.c for obtaining a crude estimated of the size (radius) of a Hydrogen-like atom. Assuming that the electron is a nonrelativistic particle, this radius (r_z) can easily be obtained

as the value of r that minimizes the following function [6, 9]:

$$E_{Sch}(r) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.1)$$

The first term of $E_{Sch}(r)$, corresponds to the nonrelativistic kinetic energy of the ground state of a trapped and slow-moving particle with the electron mass ($m = m_e$). The second term corresponds to the potential energy associated with the Coulombic attraction between a particle, with a charge equal to the electron charge ($-e$), and a positive charge $+Ze$ placed at $r = 0$. The potential energy is negative due to the attractive interaction between the electron and the nucleus. $E_{Sch}(r)$ has a minimum when [4, 10]:

$$r = a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e Z e^2} = \frac{r_B}{Z} = \frac{1}{\alpha Z} \lambda_C, \quad \text{with } \lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c} \quad \text{and } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}. \quad (3.2)$$

Therefore, Eq. (3.2) predicts that the size of a Hydrogen-like atom with atomic number Z should be approximately $1/\alpha Z$ times the electron's reduced Compton wavelength. For the Hydrogen atom $Z = 1$, thus $1/\alpha Z \approx 137$ times the electron's reduced Compton wavelength, which confirms the initial slow-moving assumption. However, the size of a Hydrogen like atom with atomic number $Z = 137$ is approximately equal to the electron's reduced Compton wavelength. Therefore, the electron moves at relativistic speeds if $Z \approx 137$ because its kinetic energy approximately is:

$$K_\lambda \approx \frac{\hbar^2}{2m_e \lambda_C^2} = \frac{1}{2} m_e c^2. \quad (3.3)$$

This means that, if the atomic number $Z \gg 1$, then the electron moves at relativistic speeds in the ground-state of Hydrogen-like atoms. Therefore, for obtaining a better estimate of the size of Hydrogen-like atoms, we should use Eq. (2.65) for modifying Eq. (3.1) in the following way [6, 9]:

$$E_{GP}(r) \approx \frac{\hbar^2}{(\gamma+1)m_e r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{with } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r}\right)^2} > 1. \quad (3.4)$$

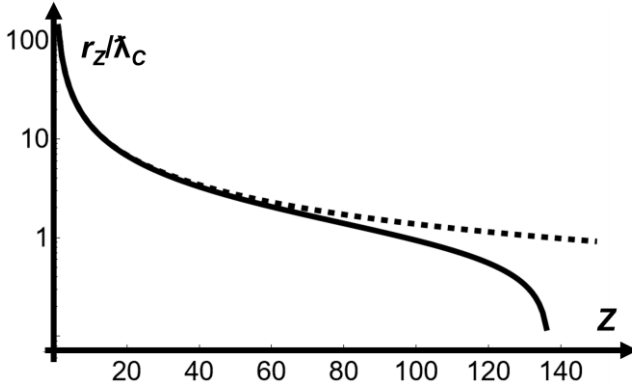


Fig. 3.1 (Discontinuous curve) Non-relativistic and (continuous curve) relativistic estimates of the radius (in reduced Compton wavelength units) of the common quantum field of the electron with $E_T = E + mc^2$ in Hydrogen-like atoms [6, 9].

$E_{GP}(r)$ has a minimum when [6, 9]:

$$r = r_Z = a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_C}{a}\right)^2}, \quad \text{with } a = \frac{r_B}{Z}. \quad (3.5)$$

If $Z \ll 1/\alpha \approx 137$, then $r_z \approx a$, which is the value previously obtained for a slow-moving electron (Eq. (3.2)). However, when $Z \gg 1$, the electron moves at relativistic speeds; this results in the square root factor in Eq. (3.5) becoming significant.

As shown in Fig. 3.1, the relativistic correction to the size of the ground state of Hydrogen-like atoms becomes significant when $a \approx \lambda_C$. Moreover, the size of the Hydrogen-like atom becomes undefined when $Z > 1/\alpha \approx 137$. This could be interpreted as a prediction about the impossibility of the natural existence of elements with $Z > 137$. This prediction matches the observed reality. No element with $Z > 118$ has ever been discovered.

As shown in Fig. 3.1, the common quantum field associated to the electron collapse to a point when $a \approx \lambda_C$. This suggests an interesting explanation for the finite number of elements in the Periodic Table of elements. Classical particles cannot form stable atoms. The observed stability of the atoms was one of the principal unexplained phenomena driving the development of Quantum Mechanics. Classical particles cannot form stable atoms, but quantum particles do can. It is the existence of a quantum field associated with a quantum particle what makes atoms stable. However, a relativistic electron moving in a Coulomb field lost the common wave associated to it when $a \approx \lambda_C$. This explains the finite number of elements in the Periodic Table. Note that nonrelativistic quantum mechanics would predict the existence of very heavy elements in Mother Nature. The finite number of elements in the Periodic Table can only be explained by combining quantum mechanics and special relativity.

It is worth noting that if $a \approx \lambda_C$, then the absolute value of the electron's potential energy can be estimated using Eq. (3.1):

$$|U_\lambda| \approx \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\lambda} = m_e c^2. \quad (3.6)$$

Consequently, neither the kinetic energy of the electron (Eq. (3.3)) nor the absolute value of its potential energy reaches ultra-relativistic values larger than $2mc^2$. This justifies disregarding in our simple approach effects related with the creation of particle-antiparticle pairs.

Finally, it should be noted that there are two waves associated with a relativistic quantum particle. We have discussed above about the size of the quantum field corresponding to the common quantum states of a relativistic quantum particle moving in a Coulomb potential. If the relativistic quantum particle were in an exotic state, then Eq. (3.4) should be substituted by the following equation:

$$E'_{GP}(r) \approx -\frac{\hbar^2}{(\gamma+1)m_e r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.7)$$

However, Eq. (3.7) does not have a local extremum because both the kinetic energy of the quantum particle in exotic states and its potential energy are negatives. This means there is no collapse of the quantum field associated with the exotic states. We conclude then that the relativistic quantum particle cannot exist in a situation where the particle cannot have two waves but only one wave associated to it.

Section 3.b. Gravity

How to combine quantum mechanics and general relativity theories is an open field of intense research. One of the simplest approaches in this direction consists in using the one-dimensional Schrödinger-Newton equation for a free quantum particle [13-14]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) - Gm^2 \int \frac{|\psi(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (3.8)$$

In Eq. (3.8), G is the gravitational constant [6, 7, 9]. Eq. (3.8) combines nonrelativistic quantum mechanics and classical gravity theories. The motivation for using the Schrödinger-Newton equation is that the only property of the particle included in the Schrödinger equation is the mass. This has been interpreted by some physicists as suggesting that there is a quantum field (wavefunction) associated to any object with mass. For instance, there should even be a wavefunction associated to the whole Universe. Our everyday experiences strongly suggest that any extended classical bodies of mass m should gravitationally interact with itself. Black holes exist due to the gravitational interaction between the different parts of their original and spatially distributed mass. The enormous pressure existing inside planets acquires the same origin. If we extrapolated this to the quantum world, then any quantum particle with mass should interact gravitationally with itself. If the quantum particle moves slowly and the gravitation attraction is not too strong, then combining Schrödinger equation with Newtonian gravitation is justified. Solving Eq. (3.8) is mathematically complicated because Eq. (3.8) is a nonlinear

equation [13]; however, if we are interested in obtained an estimate of the size of the quantum field associated with a free quantum particle with mass in a common state, we could simplify the mathematical problem to solve by proposing the following modification of Eq. (3.1) [6, 9]:

$$E_{Sch}(r) \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{Gm^2}{r}. \quad (3.9)$$

In Eq. (3.9), the Newtonian gravitational attraction of the particle with itself substitutes the Coulomb interaction included in Eq. (3.1). Due to its null size, the gravitational term in Eq. (3.1) would have to be removed if the quantum particle could not interact with itself. In this case, the kinetic energy term of Eq. (3.1) would not have a local minimum which results in an infinitely spatial extended plane wave as the wavefunction for a free particle with mass [8]. In contrast, $E_{Sch}(r)$ has a minimum when [6, 9]:

$$r = a_G = \frac{\hbar^2}{Gm^3} = l_P \left(\frac{m_P}{m}\right)^3, \text{ with } l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}, \text{ and } m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}. \quad (3.10)$$

In Eq. (3.10), l_P and m_P are the Planck's length and mass, respectively.

At relativistic speeds, the Schrödinger-Newton equation (Eq. (3.8)) should be substituted by the GP-Newton equation:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) - Gm^2 \int \frac{|\psi(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (3.11)$$

And Eq (3.9) should be substituted by the following equation [6, 9]:

$$E_{GP}(r) \approx \frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} - \frac{Gm^2}{r}, \quad \text{with } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r}\right)^2}. \quad (3.12)$$

$E_{GP}(r)$ has a minimum when [6, 9]:

$$r = r_m = a_G \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_C}{a_G}\right)^2} = l_P \left(\frac{m_P}{m}\right)^3 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{m_P}\right)^4}. \quad (3.13)$$

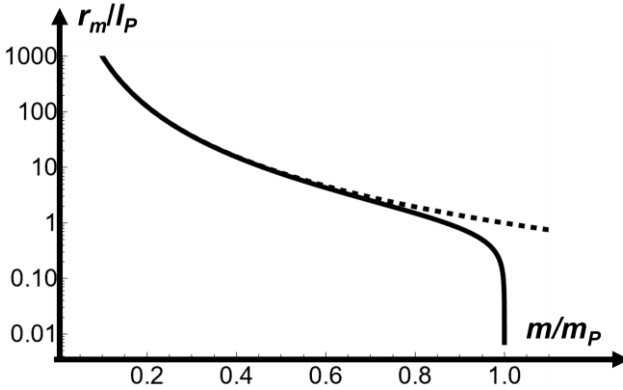


Fig. 3.2 (Discontinuous curve) Non-relativistic and (continuous curve) relativistic estimates of the radius (in Planck length units) of the common quantum field with $E_T = E + mc^2$ for a particle that interacts gravitationally with itself [6, 9].

As shown in Fig. 3.2, a notable consequence of combining quantum mechanics, the special theory of relativity, and Newtonian gravity is the existence of a critical mass $m_c = m_P$

above which the size of the particle becomes undefined. This critical mass could be interpreted as the frontier between the quantum and the classical matter world [6, 9, 14]. This is because the quantum field, associated with a relativistic quantum particle with mass m in a common state, collapses to a point when $m = m_P$. When this happens the quantum particle is transformed into a classical particle. It should be noted that the Planck mass value ($m_P \approx 22 \mu\text{g}$) is quite small for having to consider the full complexity of quantum mechanics in the daily life. In contrast, it is quite large when compared to molecular masses, and the quantum experiments that have been accomplished to date. Interestingly, biological cells, including human neurons, could still be quantum objects. In any event, the experimental confirmation or rejection of this hypothesis would have fundamental consequences for quantum mechanics and cosmology. In particular, the confirmation of the existence of m_c could mean that there is not a universal wavefunction, that the Schrödinger quantum cat cannot exist because his mass is much larger than m_P [6, 9], and that the macroscopic world that surrounds us is as classical as it seems to be for the same reason. Nevertheless, it is important to realize that huge classical bodies can be formed by numerous quantum particles.

Notably, if $m \approx m_P$, then the quantum particle moves at relativistic speeds, but its kinetic energy does not reach ultra-relativistic values larger than $2mc^2$. This is because if $m \approx m_P$, then $r \approx l_P$. Therefore, we could estimate K using Eq. (3.9):

$$K_{l_P} \approx \frac{\hbar^2}{2m_P l_P^2} = \frac{1}{2} mc^2. \quad (3.14)$$

This value is equal to Eq. (3.3) because the reduced Compton wavelength of a particle with mass $m = m_P$ is equal to the Planck length:

$$\tilde{\lambda}_C = \frac{\hbar}{m_P c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = l_P. \quad (3.15)$$

In addition, if $m \approx m_P$, the absolute value of the gravitational potential energy of a particle with mass $m = m_P$ does not reach ultra-relativistic values larger than $2mc^2$:

$$|U_{l_P}| \approx \frac{Gm^2}{l_P} = mc^2. \quad (3.16)$$

Therefore, disregarding effects related to the creation of particle-antiparticle pairs in our simple approach is well justified.

Finally, it should be noted that there are two waves associated with a relativistic quantum particle. We have discussed above about the size of the quantum field corresponding to the common quantum states of a relativistic quantum particle that gravitationally interacts with itself. If the relativistic quantum particle were in an exotic state, then Eq. (3.12) should be substituted by the following equation:

$$E'_{GP}(r) \approx -\frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} - \frac{Gm^2}{r}. \quad (3.17)$$

However, Eq. (3.17) does not have a local extremum because both the kinetic energy of the quantum particle in exotic states and its potential energy are negatives. This means

there is no collapse of the exotic quantum field associated with a relativistic quantum particle for any mass value. Nevertheless, the collapse of one of the two quantum fields associated with a relativistic quantum particle with mass is enough for the inexistence of the relativistic quantum particle in a situation where the particle can only have a wave associated to it.

Section 3.c. The Planck charge

It should be clear that the discussions presented in Sections 3.a and 3.b are also valid for antiparticles. This means that like Hydrogen-like atoms, anti-Hydrogen-like atoms could not be too heavy (Section 3.a). This also means that antimatter bodies with a mass larger than the Planck mass should be classical objects. In Sections 3.a and 3.b we explored two cases where attractive interaction exists.

For a change, let us now start by referring to antiparticles and exotic antiparticle states. We will focus now on describing the hypothetical repulsive Coulombic interaction of an electrically charged antiparticle with itself. If the antiparticle is in an exotic state and has charge q , then Eq. (3.7) should be substituted by [6, 15-16]:

$$E'_{GP a}(r) \approx -\frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{with } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r}\right)^2}. \quad (3.18)$$

$E'_{GP a}(r)$ has a maximum when [6, 15-16]:

$$r = r_q = \lambda_C \xi^{-2} \sqrt{1 - \xi^4}, \text{ with } \xi = \frac{q}{q_P}, \quad q_P = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c}. \quad (3.19)$$

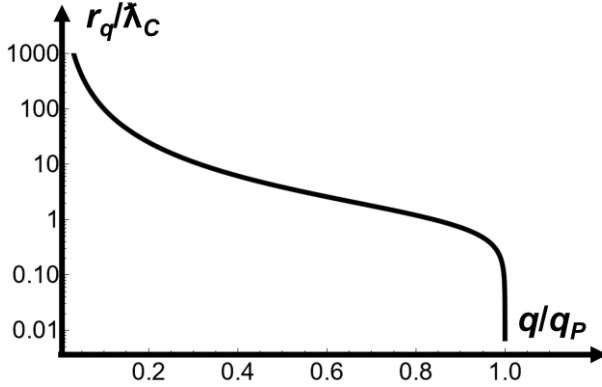


Fig. 3.3 Relativistic estimate of the radius (in Planck length units) of the exotic quantum field for an antiparticle with $E_{Ta} = E'_a - mc^2$ that interacts electrostatically with itself [4].

Therefore, $\lambda_C \xi^{-2} \rightarrow \lambda_C$ (the reduced Compton wavelength), when $|q| \rightarrow q_P \approx 11e$ (the Planck charge). Moreover, $r \rightarrow 0$, when $|q| \rightarrow q_P$. Therefore, as shown in Fig. 3.3, a notable consequence from combining quantum mechanics, special theory of relativity, and repulsive Coulombic self-interactions is the existence of a critical charge, $|q_c| = q_P$. Above this charge, the size of the antiparticle becomes undefined because the exotic quantum field collapses to a point. This critical charge could be interpreted as the frontier between the quantum and the classical antimatter world [6, 15-16].

There should be two waves associated with a relativistic quantum antiparticle. We have discussed above about the size of the quantum field corresponding to the exotic quantum states of a relativistic quantum antiparticle that electrically interacts with itself. If the antiparticle were in a common state, then Eq. (3.18) should be substituted by the following equation:

$$E_{GPa}(r) \approx \frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{with } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r}\right)^2}. \quad (3.20)$$

However, Eq. (3.20) does not have a local extremum because both the kinetic energy of the antiparticle in common states and its potential energy are positives. This means there is no collapse of the quantum field associated with the common states of the antiparticle for any value of its charge q . Nevertheless, the collapse of one of the two quantum fields associated with a relativistic quantum antiparticle is enough for the inexistence of the antiparticle in a situation where the antiparticle can only have a wave associated with it. This means that quantum antiparticles with the modulus of its electric charge ($|q|$) larger than the Plank charge should not exist. In fact, no quantum antiparticle with $|q| > q_P$ has ever been observed.

Notably, if $|q| \approx q_P$, then the quantum antiparticle moves at relativistic speeds, but neither the kinetic energy of the antiparticle nor the absolute value of its potential energy (U) reaches ultra-relativistic values larger than $2mc^2$. This is because if $|q| \approx q_P$, then $r \approx \lambda_C$. Therefore, we could estimate the absolute value of $|K'|$ and U in the following way:

$$|K'_{\lambda_C}| \approx \frac{\hbar^2}{2m\lambda_C^2} = \frac{1}{2} mc^2, \text{ and } U_\lambda \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\lambda} = mc^2. \quad (3.21)$$

Therefore again, disregarding the effects related to the creation of particle-antiparticle pairs in our simple approach is well justified.

Chapter 4. Braking the particle-antiparticle symmetry

At this point, we can focus our attention on the evident asymmetry between matter and antimatter that exist in the world surrounding us. As stated in Section 3.3, particles and antiparticles are formed in pairs, so therefore, the number of particles in the Universe should be equal to the number of antiparticles [1-5]. The fact that we seem to live in a Universe where there are many more particles than antiparticles is an unsolved mystery [1, 4-5]. In addition, no one knows why we live in a world formed almost exclusively by matter atoms and molecules. No antimatter life seems to exist in the Universe. Most physicists believe that the reason for this huge discrepancy between theory and reality is related to some type of unknown asymmetric event that occurred at the beginnings of the Universe [1, 4-5]. But nobody knows for sure why and how the observed asymmetry occurs.

It should be emphasized that everything discussed until this point in this monograph is strictly particle-antiparticle symmetric. Thus, coincides in this aspect with the big picture coming from the standard model of particle physics [3]. However, the interaction of a fundamental particle with itself is not included in the standard model of particle physics. This gives us the theoretical opportunity of proposing a way of breaking the theoretical matter-antimatter symmetry by adequately extending the standard model of particle physics. This extension should simultaneously break the theoretical matter-antimatter symmetry and includes the interaction of a quantum particle with itself.

Section 4.a Shortage of antimatter elements

By hypothesizing that a quantum particle could interact electrostatically with itself, we could find a simple explanation for the observed shortage of antimatter elements ($Z < 2-3$) when compared with the relatively larger number of elements in the Periodic Table ($Z < 120$). We should add that the symmetry break-down requires that a quantum particle interacts with itself, but in a different manner than the corresponding antiparticle does. In Section 3, it was proposed that the antiparticle self-repulsive Coulombic interaction results in the validity of Eqs. (3.20) and (3.18). This corresponds to the validity of the following nonlinear relativistic wave equations, respectively [15-16]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu_a} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi_a(r, t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\psi_a(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (4.1)$$

And

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Omega_a(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu'_a} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Omega_a(r, t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\Omega_a(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (4.2)$$

If the charged antiparticle is in a common state, Eq. (4.1) is valid. If the charged antiparticle is in an exotic state, Eq. (4.2) is valid. In contrast, the matter-antimatter symmetry can be broken by proposing, first, that the corresponding particle with charge $-q$ electrostatically interacts with itself and, second, that the following wave equations are valid for the particle [15-16]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r, t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\psi(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (4.3)$$

And

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Omega(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2\mu'} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Omega(r, t) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\Omega(r', t)|^2}{|r' - r|} dr'. \quad (4.4)$$

If the charged particle is in a common state, Eq. (4.3) is valid. If the charged particle is in an exotic state, Eq. (4.4) is valid. Note that the matter-antimatter symmetry is broken because Eqs.(4.2) and (4.4), the wave equations for the exotic states, are not equals. Solving the waves equations (Eqs. (4.1) to (4.4)) may present notable mathematical difficulties due to their nonlinear character. However, as shown in Section 3.c, we could have a crude estimated of the physical reality corresponding to them by solving Eqs. (3.18), (3.20) and the following equation:

$$E'_{GP}(r) \approx -\frac{\hbar^2}{(\gamma+1)mr^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{with } \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_C}{r}\right)^2}. \quad (4.5)$$

In contrast with the equation corresponding to the exotic state of the antiparticle (Eq. (3.18)), the equation corresponding to the exotic state of the particle (Eq. (4.5)) does not have a local minimum. For this reason, the hypothesized Coulombic self-interaction breaks the particle-antiparticle symmetry. Note that if the relativistic quantum particle is in a common state, then Eq. (3.20) should also be valid for the relativistic quantum particle.

Consequently, only the exotic quantum field associated with the antiparticle could collapse to a point due to the Coulombic interaction of the antiparticle with itself. This is a theoretical proposal that is outside of the standard model of particle physics. This is because it supposes the interaction of a every relativistic quantum particle and antiparticle with itself. This proposal does not affect the standard model of particle physics in its scope of applications but extends the range of applications of relativistic quantum mechanics. Moreover, as will be shown below, this theoretical proposal is strongly validated by the compelling match between its predictions and the physical reality surrounding us.

First, we could easily explain the observed shortage of antimatter chemical elements when compared with the relative abundance of chemical elements in the Periodic table. The stability of atoms is a consequence of quantum mechanics. In nonrelativistic quantum mechanics, it is the existence of a wave associated with a quantum particle what makes atoms stable. In relativistic quantum mechanics there are two waves associated with a relativistic quantum particle. Atoms and antiatoms are stable if and only if there are two waves associated to the electron and positron cloud surrounding the nucleus, respectively.

A stable Hydrogen-like atom requires a relativistic quantum electron attracted by the nucleus. Two waves should be associated with the electron. However, as discussed in Section 3.a, if $Z > 137$, the common wave associated to the electron collapses to a point. This theoretical prediction matches the no existence of atoms with $Z > 137$. This is also

valid for anti-Hydrogen-like antiatoms formed by an antiproton and a positron. This is because Eqs. (3.4) and (3.7) are equally valid for Hydrogen-like atoms and anti-Hydrogen-like antiatoms.

A stable antiatom requires a relativistic quantum cloud of positrons attracted by the nucleus. Two waves should be associated with the cloud of positrons. However, as discussed in Section 3.c, if $Ze > q_p \approx 11e$, the exotic wave associated to the cloud of positrons collapses to a point. This theoretical prediction matches the no existence of antiatoms with $Z > 11$. This constitutes an additional and stronger limitation to the atomic number of possible antiatoms. However, due to Eq. (4.5), the exotic wave associated with a cloud of electrons never collapses to a point. Consequently, there are matter atoms with $11 < Z < 137$. This explains the observed shortage of antimatter elements when compared with the relatively larger number of elements in the Periodic Table [6, 15-16].

Section 4.b. Biological antimatter cannot exist

The prediction about the impossibility of the existence of atoms with $Z > 137$ is a correct but approximated prediction. No atom with $Z > 118$ has ever been observed. Similarly, the prediction about the impossibility of the existence of antiatoms with $Z > 11$ is a correct but approximated prediction. No antiatom with $Z > 2-3$ has ever been observed. We can then argue that Carbon antiatoms with $Z = 6$ do not exist because if $Z = 6$ the quantum field associated to exotic state of a cloud of 6 positrons collapses to near a point. The

impossibility of the existence of Carbon antiatoms explains why we never have observed biological antimatter [6, 15-16].

Section 4.c. Primordial black holes and antimatter electrical sinks

Previously, we have argued that there is no wave associated with a classical particle but there are two waves associated with a relativistic quantum article. If one of the waves collapses to a point, then the quantum particle transforms into a classical particle. Classical particles cannot form stable atoms.

There is another hypothetical situation where the collapse of the quantum field to a point could be relevant [6, 15-16]. It has been hypothesized the possible existence of primordial black holes with a relatively small mass. Primordial black holes may have been created around thirteen billion years ago, at the beginning of our universe. Mass fluctuations with $m > m_P$ could have produced their formation [14]. As discussed above, these hypothetical mass fluctuations may have formed primordial relativistic quantum objects. If their masses were larger than Planck's mass, then the collapse to points of their common quantum fields (Fig. 3.2) may have created primordial black holes. At present, there is no observational evidence of the existence of primordial black holes. Nevertheless, the possible existence of these small mass black holes is a research topic of great interest.

Similarly, primordial antimatter electric sinks may have been created around thirteen billion years ago, at the beginning of our universe [6, 15-16]. Antimatter charge fluctuations with $|q| > q_P$ could have produced their formation. As discussed above, these hypothetical antimatter charge fluctuations may have formed primordial relativistic quantum objects. If their charges were larger than Planck's charge, then the collapse to points of their exotic quantum fields (Fig. 3.3) may have created primordial antimatter electric sinks. This may explain the existence of an excess of charged matter in the rest of the universe [6, 15-16].

Chapter 5. Dark energy and cosmological constant

After the ideas exposed in the previous chapters were published [6, 16], the author of this monograph realized there is another possible consequence of them. This is related to a well-known extremely wrong prediction of relativistic quantum mechanics [1, 4].

A crude estimated of the energy density of the quantum vacuum can be obtained by realizing that the Planck mass is the maximum possible mass of any particle and antiparticle formed from the quantum vacuum (Eq. (3.13)). Therefore, the vacuum needs to contain the following energy for allowing the temporary formation of a particle-antiparticle virtual pair [2, 6]:

$$\Delta E = 2m_P c^2 . \quad (5.1)$$

The vacuum, quantum or not, should be homogeneous; therefore, the energy density of the vacuum should be the same everywhere. A crude estimate of the maximum energy density of the vacuum (u_v) could be obtained dividing ΔE by the minimum volume that a quantum particle could have (Eq. (3.15)):

$$V_{min} \approx l_P^3 . \quad (5.2)$$

Consequently [4]:

$$u_v \approx \frac{2m_P c^2}{l_P^3} = \frac{2c^7}{\hbar G^2} \approx 10^{114} \text{ J/m}^3 . \quad (5.3)$$

More sophisticated calculations (which also invoke an arbitrary cut-off to avoid an infinite value of (u_v)) result in a

value of $u_v \approx 10^{111} \text{ J/m}^3$ [4]. These are relativistic quantum mechanics predictions.

In another hand, it is currently assumed in Cosmology the existence of dark energy [1, 4]. The dark energy's density (u_d) should be given by the following equation [4]:

$$u_d = \rho_\Lambda c^2, \text{ with } \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \text{constant} . \quad (5.4)$$

In Eq. (5.4), G and Λ are the gravitational and cosmological constants, respectively. This implies a constant value of u_d . This suggests that the energy of the quantum vacuum may be the nature of dark energy. Unfortunately, the current observational value of u_d is [4]:

$$u_d \approx 6 \times 10^{-10} \text{ J/m}^3 . \quad (5.5)$$

Therefore, if we identify u_d and u_v , then there is a huge mismatch of some 120 order between the relativistic quantum mechanics prediction (u_v) and the observational value (u_d). However, we could correct the relativistic quantum mechanics in the following way.

As we discussed in Section 3.b, looks like the Planck mass constitutes a frontier between the quantum and the classical world. Any object with $m > m_P$ should be a classical object, while any object with $m < m_P$ should be a quantum object. The minimum energy of a free classical object is zero, while the minimum energy of a free quantum object in a common state is larger than zero. Both the cosmological and the quantum vacuums has an energy density larger than zero. The classical vacuum is really empty with zero energy density. Consequently, due to Einstein's formula $E = mc^2$,

there is a mass associated to the cosmological and quantum vacuums.

Considering the quantum vacuum an object, and using the so-called radius of the observable universe ($r_O \approx 10^{26}$ m), we can obtain the mass of the whole vacuum in the universe (m_d):

$$m_d \approx \rho_\Lambda r_O^3 \gg 2m_P . \quad (5.6)$$

Therefore, matching well the observational value of dark energy's density (Eq. (5.5)), the whole vacuum in the universe should be a classical object with zero or a very small energy density.

The vacuum can be quantum only if its mass is smaller than twice the Planck mass. The factor of two is for allowing the formation of a virtual particle-antiparticle pair. We then could use the observational value of the dark energy's density for estimating the minimum radius of the quantum vacuum (r_{qv}):

$$2m_P < m_d r_{qv}^3 \Rightarrow r_{qv} > \sqrt[3]{\frac{2m_P}{m_d}} \approx 10^6 m \gg l_P . \quad (5.7)$$

This reveals the mistake in the estimate given by Ec. (5.3), the radius of the quantum vacuum cannot be as small as the Planck length but much larger. This hypothesis implies that the Universe's whole vacuum is classical, but it is formed by numerous, $m_d/2m_P \approx 10^{60}$, independent quantum vacuums. There should be much more independent quantum vacuums than stars in the Universe.

References:

1. Robson B. A. (ed.) *Redefining Standard Model Cosmology*, (doi: 10.5772/intechopen.75275, 2019).
2. Greiner W., *Relativistic Quantum Mechanics: wave equations*, (Spring-Verlag, New York, 1990).
3. Schwartz Matthew D., *Quantum Field Theory and the Standard Model*, (Cambridge University Press, New York, 2014).
4. Carroll, B. W. and Ostlie D. A., *An Introduction to Modern Astrophysics*, (2nd ed., Cambridge University Press, New York, 2017).
5. Canetti L., Drewes M., Shaposhnikov M., Matter and Antimatter in the Universe, *New J. Phys.* **14**, 095012, (2012).
6. Grave de Peralta L., Fernandez Lozada M., Farooq H., Eichman G., Singh A., and Prime G., *Relativistic and Non-Relativistic Quantum Mechanics: both at once*, (Springer, Switzerland, 2023).
7. Walker J., Halliday D., and Resnick R., *Fundamentals of Physics*, 10th Ed. (Wiley, Hoboken, 2014).
8. Griffiths D.J., *Introduction to Quantum Mechanics*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995).
9. Grave de Peralta L., Poveda L. A., and Poirier B., Making relativistic quantum mechanics simple, *Eur. J. Phys.*, **42**, 055404 (2021).

10. Christodeulides C., *The Special Theory of Relativity*, (Springer, New York, 2016).
11. Grave de Peralta L., Natural extension of the Schrödinger equation to quasi-relativistic speeds, *J. Mod. Phys.* **11**, 196-213 (2020).
12. Grave de Peralta L., Did Schrödinger have other options?, *Eur. J. Phys.*, **41**, 065404 (2020).
13. Diósi L., Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects, *Phys. Lett. A*, **105**, 199-202 (1984).
14. Penrose R., Wavefunction collapse as a real gravitational effect, *Math. Phys.*, 266-282 (Imperial College Press, London, 2000).
15. Grave de Peralta L., About the asymmetry between matter and antimatter, *J. Mod. Phys.* **13**, 1099-1116 (2022).
16. Grave de Peralta L., *Where the biological antimatter is?*, (BP International, India, 2024).

Sobre el autor

Luis Grave de Peralta nació en 1957 en Holguín, Cuba. Grave se graduó con una maestría en física en 1982 en la Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba. Fue profesor en el departamento de Física de la Universidad de Oriente hasta 1990, cuando fue expulsado de su cargo tras renunciar al Partido Comunista de Cuba. Grave trabajó en el Departamento de Sismología de la sección local de la Academia Nacional de Ciencias hasta 1992, cuando fue arrestado por la policía política y condenado a 13 años de prisión acusado de rebelión por medios pacíficos. Después de 4 años en prisión como prisionero de conciencia, Grave fue deportado a los Estados Unidos. Luis se graduó con un Ph. D. en Ingeniería Eléctrica en el año 2000 en Texas Tech University (TTU), Lubbock, EE. UU. Dr. Luis fue profesor en el Departamento de Física y Astronomía de TTU desde 2007 hasta su jubilación en 2022. Actualmente, Dr. Luis es Profesor Emérito en el Departamento de Física y Astronomía de la TTU. El es autor de más de 90 artículos publicados en revistas científicas de archivo revisadas por sus pares. Grave de Peralta es un pionero de un nuevo enfoque pedagógico de la mecánica cuántica relativista, y de las implicaciones de este enfoque para el estudio de las consecuencias fundamentales que la teoría de la relatividad especial introduce en la mecánica cuántica.

About the author

Luis Grave de Peralta was born in 1957 in Holguin, Cuba. Grave graduated with a master's in physics in 1982 at the Oriente University, Santiago de Cuba, Cuba. He was a professor in the department of Physics at the Oriente University up to 1990, when he was expelled from his position after resigning from the Cuban Communist Party. Grave worked in the Department of Seismology at the local section of the National Academy of Sciences up to 1992, when he was arrested by the political police and condemned to 13 years in prison accused of rebellion using pacific means. After 4 years in prison as a prisoner of consciousness, Grave was deported to USA. Luis graduated with a Ph. D. in Electrical Engineering in 2000 at Texas Tech University (TTU), Lubbock, USA. Dr. Luis was a professor in the Department of Physics and Astronomy at TTU from 2007 up to his retirement in 2022. Currently, Dr. Luis is an Emeritus Professor in the Department of Physics and Astronomy at TTU. He is the author of more than 90 papers published in archival peer-reviewed scientific journals. Grave de Peralta is a pioneer of a novel pedagogical approach to relativistic quantum mechanics, and the implications of this approach for the study of the fundamental consequences that special relativity theory introduces in quantum mechanics.

Enlaces adicionales - Additional Links:

Enlace al libro – Link to the book

Mecánica Cuántica Relativista y No- Relativista: las dos a la vez

<https://store.bookbaby.com/book/mec%c3%a1nica-cu%c3%a1ntica-relativista-y-no-relativista-las-dos-a-la-vez->

Relativistic and Non-Relativistic Quantum Mechanics: both at once

<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-37073-1/>

Página web del autor - Personal author's webpage

www.luisgrave.com

Páginas del autor en las redes sociales – Social media author's pages

YouTube

www.youtube.com/@luisgravedeperalta

Facebook

<https://www.facebook.com/profile.php?id=61551545957434>

<https://www.facebook.com/profile.php?id=61551813122090>

Instagram

www.instagram.com/luisgdepdm

X

<https://twitter.com/luisGdeP>

TikTok

<https://www.tiktok.com/@relativisticqm>

WhatsApp

<https://whatsapp.com/channel/0029Va9fisJGZNCwgVQsAJ2G>

ENGLISH
PAGES (70-134)

ESPAÑOL
PÁGINAS (2-68)